Sur les articles de

Henri Poincaré

SUR LA DYNAMIQUE DE L'ÉLECTRON

Le texte fondateur de la Relativité en langage scientifique moderne

par

Anatoly A. LOGUNOV

Directeur de l'Institut de Physique des Hautes Énergies (Protvino, Russie)
Membre de l'Académie des Sciences de Moscou

Traduction française de
Vladimir Petrov (Institut de Physique des Hautes Énergies, Protvino, Russie)
Christian Marchal (Directeur de Recherches à l'Office National de Recherches Aérospatiales, Châtillon, France)

Résumé

Lundi 5 juin 1905. À l'Académie des Sciences de Paris, Henri Poincaré présente « Sur la dynamique de l'électron », une note de quatre pages, la longueur limite. Le vendredi 9 juin, ce texte est imprimé et envoyé à tous les correspondants de l'Académie. Il arrive à Berne au début de la semaine suivante, où un employé de l'office des brevets appelé à devenir célèbre prépare pour les *Beïblatter zu der Annalen der Physik* des résumés des textes de Physique les plus intéressants...

Juillet 1905. Henri Poincaré développe considérablement le texte de sa note et l'envoie pour publication, sous le même titre, au *Rendiconti del circolo matematico di Palermo.* Ce second texte, de 47 pages, sera reçu le 23 juillet et publié en janvier 1906.

Pourquoi donc ce journal lointain, qui n'est même pas un journal de Physique ? Avant tout, par amitié envers son directeur qu'il estimait, mais aussi parce que de nombreux physiciens de cette époque considéraient Henri Poincaré comme un mathématicien et ne lui ouvraient pas les colonnes de leurs journaux. En conséquence, ce travail, le travail fondateur de la Relativité, restera longtemps à peu près ignoré en ce début de siècle où la Science marche à pas de géant !..

Pour réparer cette injustice de ses confrères, et parce qu'il admire passionnément ce grand pionnier à la fois physicien, mathématicien, astronome et philosophe de la science, un physicien russe, l'académicien Anatoly A. Logunov, a réédité en 1984 ces deux textes de Poincaré en actualisant leur présentation et en les assortissant de commentaires appropriés. Ces nouveaux textes ont été traduits du russe à l'anglais en 1995 et déjà trois fois réédités.

La présente traduction en français, avec la mise à jour, permet les comparaisons directes et fait comprendre pourquoi tant de physiciens des années quarante et cinquante ont considéré que Poincaré était peu clair et n'avait pas vraiment compris le sujet : il était très clair et avait une excellente compréhension de la Relativité, mais les expressions mathématiques et le vocabulaire scientifique étaient si différents...

Mots clés : Relativité restreinte ; Henri Poincaré ; texte fondateur ; langage scientifique moderne.

Abstract

Monday, June 5, 1905. At the French Academy of Science, Henri Poincaré presents *On the dynamic of the electron*, a four pages note, maximum length. That text is edited Friday, June 9 and sent to all universities. At the beginning of the following week, it arrived at Bern where a clerk of the patent office, who will become famous, prepares for the *Beïblatter zu der Annalen der Physik* summaries of the most interesting physics texts, including those of the French Academy of Sciences...

July 1905. Henri Poincaré develops his text and sends it for publication, under the same title, to the *Rendiconti del circolo matematico di Palermo.* That second text, 47 pages, will be received on July 23, and will be published in January 1906.

Why to such a far away paper that is not even a physics newspaper ? Above all, because the Director of this journal was his friend, but also because the physicists of this time considered Henri Poincaré as a mathematician, and a mathematician cannot write in a physics journal! Consequently that work – the founding work of relativity – will remained almost ignored during the beginning of the twentieth century, while Sciences were progressing at giant steps...

Because of this injustice against a great pionneer, physicist, mathematician, astronomer and philosopher of Science, a Russian admirer, the physicist and academician Anatoly A. Logunov, republished these two texts in 1984 with an update of their mathematical and physical expressions, and with suitable comments. These new texts have been translated into english in 1995 and have already been three times republished.

The present French translation, and updating, will allow direct comparisons and will explain why so many physicists of the forties and the fifties considered that Poincaré was unclear and did not really understand the subject: he was very clear and had an excellent understanding of Relativity, but the scientific vocabulary was so different...

Keywords: Henri Poincaré, Relativity, Founding text, Updating.

SOMMAIRE

Avant-propos

Dans ce travail, nous voudrions rendre son dû au talent exceptionnellement profond et varié du grand mathématicien, mécanicien et physicien théoricien Henri Poincaré, dont les travaux de base laissent leur trace éclatante dans de nombreux domaines de la science moderne. Ce n'est pas notre but de présenter tous les travaux de Henri Poincaré, ni même seulement ceux de physique, car cela demanderait un travail très important et très sérieux. Nous nous limiterons à ses deux travaux connus sous le titre « Sur la dynamique de l'électron » qui furent publiés en 1905-1906 et jetèrent les fondements de la théorie de la relativité et de la mécanique relativiste.

Déjà, dans le premier de ces deux travaux, celui du 5 juin 1905, Henri Poincaré, en partant des équations de Maxwell-Lorentz, avait formulé le principe de relativité étendu aux phénomènes électromagnétiques, et l'avait exprimé comme une vérité physique rigoureuse. Il avait aussi découvert le groupe des transformations spatio-temporelles, transformations qu'il avait baptisées du nom de Lorentz. Il avait étendu ces transformations de Lorentz à tous les aspects de la nature indépendamment de leur origine, phénomènes gravitationnels inclus.

Dans le travail du 23 juillet 1905, il a formulé l'essentiel de la théorie de la relativité et a découvert les lois de la mécanique relativiste.

En étudiant ces deux travaux, on comprendra la contribution de base de Henri Poincaré dans la création de la relativité. Nos commentaires ont le même objectif. Ces travaux sont résolument modernes tant dans leur forme que dans leur fond, ils sont vraiment des perles de la physique théorique. Cependant, il faut souligner que leur étude requiert une approche sérieuse et détaillée. Il est arrivé que des physiciens célèbres (par exemple Louis de Broglie) déclarent que *« Poincaré n'a pas fait le pas décisif et c'est pourquoi il n'a pas construit la théorie de la relativité »* ; mais de telles propositions sont pour le moins naïves et incorrectes, elles témoignent que leur auteur s'était contenté de lire superficiellement « Sur la dynamique de l'électron »... à moins qu'il n'ait pas vraiment compris la relativité !*

Ces deux travaux sont la création d'un très grand naturaliste avec une profondeur et une exactitude d'expression surprenantes. Ils contiennent presque tout

* Note du traducteur : Il faut dire, à la décharge de Louis de Broglie, que Poincaré joue de malchance. Son travail de juillet 1905, pour lequel il n'a pas pu trouver de journal de physique, est publié dans un journal sicilien de mathématique : le *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*. En conséquence, il n'est guère connu avant les années trente ; or, entretemps, le vocabulaire scientifique a prodigieusement changé tandis que, d'une traduction à l'autre, le travail d'Einstein est constamment réactualisé. Poincaré paraît donc obscur et difficile à ceux qui ne se remettent pas dans le vocabulaire de son époque, et c'est pourquoi le travail de mise à jour et de commentaire de Messieurs Logunov et Matveev est particulièrement utile.

l'essentiel de ce qui constitue la théorie de la relativité. Tout ceux qui ont la possibilité de les étudier peuvent s'en convaincre, comme Wolfgang Pauli qui avait beaucoup apprécié les ouvrages de Poincaré et qui, dans son âge mur, écrivait :

« Dans la coïncidence des résultats obtenus indépendamment par Einstein et Poincaré, je m'aperçois du sens profond de l'harmonie de la méthode mathématique et de l'analyse qui s'appuie sur la totalité des données de l'expérience physique. »

Les deux travaux « Sur la dynamique de l'électron » sont analysés ici avec les notations modernes et avec de brefs commentaires dans des paragraphes en retrait et en caractères plus petits, parfois dans le corps du texte, en italiques et précédés d'un astérisque. Ces commentaires ont été composés avec l'aide du professeur V. A. Matveev.

Anatoly A. Logunov

Notations anciennes et modernes

Afin de faciliter la lecture nous donnons ici la comparaison des notations anciennes et modernes utilisées dans le présent travail.

Comme d'habitude, en notation moderne, les lettres en caractère gras : $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$, etc., désignent des vecteurs à trois dimensions dont les composantes sont B_x, B_y, B_z, etc.

[*Rappel :* C = coulomb ; H = henry ; F = farad ; T = tesla]

$$
\begin{aligned}
(\alpha,\ \beta,\ \gamma) &= \boldsymbol{B} : \text{induction magnétique (T)} \\
&\ \boldsymbol{H} : \text{champ magnétique (ampère-tour par mètre)} \\
(f,\ g,\ h) &= \boldsymbol{E} : \text{champ électrique } (\mathrm{V \cdot m^{-1}}) \\
&\ \boldsymbol{D} : \text{induction électrique ou « déplacement » } (\mathrm{C \cdot m^{-2}}) \\
(F,\ G,\ H) &= \boldsymbol{A} : \text{potentiel vecteur } (\mathrm{V \cdot s \cdot m^{-1}}) \\
\psi &= \varphi : \text{potentiel scalaire (V)} \\
(\xi,\ \eta,\ \zeta) &= \boldsymbol{v} : \text{vitesse de l'électron ou de la particule chargée } (\mathrm{m \cdot s^{-1}}) \\
(X,\ Y,\ Z) &= \boldsymbol{f} : \text{force par unité de volume } (\mathrm{N \cdot m^{-3}}) \\
(X_1,\ Y_1,\ Z_1) &= \boldsymbol{F} : \text{force par unité de masse } (\mathrm{N \cdot kg^{-1}}) \\
&\ \boldsymbol{F}_u : \text{force par unité de charge } (\mathrm{N \cdot C^{-1}}) \\
&\ \boldsymbol{F}_\mathrm{e} : \text{force pour la charge électrique e (N)} \\
&\ \rho : \text{densité de charges } (\mathrm{C \cdot m^{-3}}) \\
&\ \boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v} : \text{densité du courant des charges } (\mathrm{C \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}) \\
(u,\ v,\ w) &= \boldsymbol{g} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} : \text{densité totale de courant} \\
&= \text{densité du courant des charges, plus courant de déplacement.} \\
\left.\begin{aligned} \varepsilon &= -\beta \\ k &= \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} & \text{coefficients utilisés dans la transformation de Lorentz.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&c\ : \text{vitesse de la lumière } (299\ 792\ 458\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}) \\
&\mu\ : \text{perméabilité magnétique du vide } (4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}) \\
&\varepsilon\ : \text{permittivité du vide} = 8{,}854\ 187\ 82 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}} \\
&\mu\, \varepsilon\, c^2 = 1
\end{aligned}
$$

En général, la vitesse de la lumière est prise pour unité : $c = 1$ et $\mu\varepsilon = 1$. En conséquence, le coefficient β est la vitesse du second référentiel par rapport au premier.

Rappelons aussi que le mot **« électron »** n'a pas du tout le même sens en 1905 et aujourd'hui. À cette époque, il désigne n'importe quelle particule chargée, positivement ou négativement, et l'on en connaît très mal les propriétés. Cela explique des expressions qui nous semblent aujourd'hui étranges comme par exemple « les différentes molécules de l'électron » pour désigner différents points à l'intérieur d'une particule chargée...

Henri Poincaré
Sur la dynamique de l'électron
(texte du 5 juin 1905)

Il semble au premier abord que l'aberration de la lumière et les phénomènes optiques qui s'y rattachent vont nous fournir un moyen de déterminer le mouvement absolu de la Terre, ou plutôt son mouvement, non par rapport aux astres, mais par rapport à l'éther. Il n'en n'est rien ; les expériences où l'on ne tient compte que de la première puissance de l'aberration ont d'abord échoué et l'on en a aisément découvert l'explication ; mais Michelson, ayant imaginé une expérience où l'on pouvait mettre en évidence les termes dépendant du carré de l'aberration, ne fut pas plus heureux. Il semble que cette impossibilité de démontrer le mouvement absolu soit une loi générale de la nature.[1]

Ces lignes écrites par Poincaré en 1905 furent précédées dix années auparavant par un texte qui montre clairement que l'idée d'une loi générale de l'impossibilité de déterminer le mouvement absolu mûrissait chez lui depuis longtemps :

« L'expérience a révélé une foule de faits qui peuvent se résumer dans la formule suivante : il est impossible de rendre manifeste le mouvement absolu de la matière, ou mieux le mouvement relatif de la matière pondérable par rapport à l'éther ; tout ce qu'on peut mettre en évidence c'est le mouvement de la matière pondérable par rapport à la matière pondérable.[2] »

En développant cette idée de l'impossibilité totale de détermination du mouvement absolu, en relation avec l'hypothèse de Lorentz selon laquelle tous les corps terrestres subissent une contraction de 5×10^9 dans le sens du mouvement de la Terre, Poincaré écrivait[3] :

« Cette étrange propriété semblerait un véritable "coup de pouce" *donné par la nature pour éviter que le mouvement de la Terre puisse être révélé par des phénomènes optiques. Ceci ne saurait me satisfaire et je crois devoir dire ici mon sentiment : je considère comme très probable que les phénomènes optiques ne dépendent que des mouvements relatifs des corps en présence, sources lumineuses ou appareils optiques et cela* non pas aux quantités près de l'ordre du carré ou du cube de l'aberration, mais rigoureusement. *À mesure que les expériences deviendront plus exactes, ce principe sera vérifié avec plus de précision.*

Faudra-t-il un nouveau coup de pouce*, une hypothèse nouvelle à chaque approximation ? Évidemment non : une théorie bien faite devrait permettre de démontrer le principe d'un seul coup dans toute sa rigueur. La théorie de Lorentz ne le fait*

---

[1] Poincaré H., *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **140**, pages 1504-1508, 5 juin 1905.

[2] Poincaré H., « À propos de la Théorie de M. Larmor, » *L'éclairage électrique*, t. 5, p. 14, 5 octobre 1895, et aussi : *Œuvres de Henri Poincaré*, Gauthier-Villars, t. 9, p. 412, Paris, 1954.

[3] Poincaré H., *Électricité et optique : la lumière et les théories électrodynamiques,* deuxième édition revue et complétée par Jules Blondin et Eugène Neculcea, Gauthier-Villars, Paris, 1901, p. 536

pas encore. De toutes celles qui ont été proposées, c'est elle qui est le plus près de le faire. On peut donc espérer la rendre parfaitement satisfaisante sous ce rapport sans la modifier trop profondément. »

Lors du congrès scientifique mondial de Saint-Louis (Missouri), en septembre 1904, Poincaré fut invité à présenter une conférence générale sur « L'état actuel et l'avenir de la Physique mathématique » il ajouta audacieusement le « principe de relativité » aux cinq principes classiques de la Physique :

« Le principe de relativité, d'après lequel les lois des phénomènes physiques doivent être les mêmes pour un observateur fixe et pour un observateur entraîné dans un mouvement de translation uniforme, ***de sorte que nous n'avons et ne pouvons avoir aucun moyen de discerner si nous sommes, oui ou non, emportés dans un pareil mouvement.***[4] *»*

On ne s'étonnera donc pas que Poincaré poursuive son compte rendu de juin 1905 en écrivant ce qui suit.

Une explication a été proposée par Lorentz, qui a introduit l'hypothèse d'une contraction de tous les corps dans le sens du mouvement terrestre ; cette contraction rendrait compte de l'expérience de Michelson et de toutes celles qui ont été réalisées jusqu'ici, mais elle laisserait la place à d'autres expériences plus délicates encore et plus faciles à concevoir qu'à exécuter, qui seraient de nature à mettre en évidence le mouvement absolu de la Terre. Mais si l'on regarde l'impossibilité d'une pareille constatation comme hautement probable, il est permis de prévoir que ces expériences, si l'on parvient jamais à les réaliser, donneront encore un résultat négatif. Lorentz a cherché à compléter et à modifier son hypothèse de façon à la mettre en concordance avec le postulat de l'impossibilité *complète* de la détermination du mouvement absolu. C'est ce qu'il a réussi dans son article intitulé *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of the light* (*Proceedings* de l'Académie d'Amsterdam, 27 mai 1904).

L'importance de la question m'a déterminé à la reprendre ; les résultats que j'ai obtenus sont d'accord sur tout les points importants avec ceux de Lorentz ; j'ai été seulement conduit à les modifier et à les compléter dans quelques points de détails.

Le point essentiel, établi par Lorentz, c'est que les équations du champ électromagnétique ne sont pas altérées par une certaine transformation (que j'appellerai du nom de Lorentz) et qui est de la forme suivante :

$$x' = \gamma l(x - \beta t)\ ; \qquad y' = ly\ ; \qquad z' = lz\ ; \qquad t' = \gamma l(t - \beta x) \tag{1}$$

x, y, z sont les coordonnées et t le temps avant la transformation, x', y', z',et t' après la transformation. D'ailleurs, β est une constante qui définit la transformation

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

[4] Poincaré H., *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **28**, 2e série (réorganisée **39-1**), 1904, page 306.

et l est une fonction quelconque de β.

Poincaré écrit : *« Le point essentiel établi par Lorentz... »*, mais Lorentz lui-même corrigera loyalement cette affirmation généreuse : *« je n'ai pas indiqué la transformation qui convient le mieux. Cela a été fait par Poincaré et ensuite par M. Einstein et Minkowsky.*[5] *»*

Plus que tout autre personne, Poincaré tenait en très haute estime quiconque donnait une impulsion à sa pensée et à sa créativité. Les considérations personnelles de priorité lui furent absolument étrangères.

Les formules (1) montrent que la condition $x = \beta t$ correspond à l'origine ($x' = y' = z' = 0$) du second système de référence, laquelle se déplace donc par rapport système x, y, z avec la vitesse β le long de l'axe des x. Les transformations de Lorentz relient donc deux référentiels en mouvement rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre avec la vitesse β le long des axes Ox et $O'x'$ (rappelons que la vitesse de la lumière est prise pour unité).

Ainsi, les transformations de Lorentz relient les variables x, y, z, t des systèmes de référence en translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres.

Nous verrons que l'invariance des équations du champ électromagnétique lors d'un changement de système de référence requiert que ce changement se fasse selon les règles de la transformation de Lorentz. Les équations de Maxwell-Lorentz sont donc directement liées au principe de relativité, et l'application de ce principe aux équations de Maxwell conduit aux transformations de Lorentz par une démonstration purement mathématique.

Poincaré poursuit sa note en écrivant :

On voit que, dans cette transformation, l'axe des x joue un rôle particulier, mais on peut évidemment construire une transformation où ce rôle serait joué par une droite quelconque passant par l'origine. L'ensemble de toutes ces transformations, joint à l'ensemble de toutes les rotations de l'espace, doit former un groupe ; mais, pour qu'il en soit ainsi, il faut que $l = 1$, et c'est là une conséquence que Lorentz avait obtenu par une autre voie.

Il faut souligner qu'en établissant la nature de groupe pour l'ensemble comprenant les transformations spatiales, celles de Lorentz et leurs produits, les unes et les autres laissant invariantes les équations de l'électrodynamique, Poincaré avait découvert l'existence en Physique d'un type tout à fait nouveau de symétrie.

Ce type de symétrie est lié au groupe qu'il avait appelé groupe de Lorentz, lequel comprend les rotations spatiales ordinaires mais laisse invariante l'origine O de l'espace-temps. En lui ajoutant les translations spatiales et/ou temporelles, on obtient le groupe maximal des transformations laissant invariantes les équations des champs et celles des mouvements des particules. Ce groupe maximal est désormais appelé « groupe de Poincaré » comme l'a proposé Eugène Wigner.

À ce sujet Richard Feynman écrivit :

"Precisely, Poincaré proposed to find out what one can do with equations without altering their form. He was the person who had the idea to examine the physical

[5] Lorentz H. A., « Deux mémoires de Henri Poincaré dans la Physique mathématique », *Acta matematica*, **38**, page 296, 1921, et *Œuvres de Henri Poincaré*, tome 11, Gauthier-Villars, Paris, 1956, page 249.

properties of physical laws" (« Poincaré proposa de rechercher ce que l'on peut faire avec des équations sans altérer leur forme. Il fut celui qui eut l'idée d'examiner les propriétés de symétrie des lois physiques »).

Continuons la lecture de la note de Poincaré, mais avec des notations modernes et en rappelant qu'à son époque le mot électron désigne n'importe quelle particule chargée.

Soit ρ la densité électrique de l'électron et $\boldsymbol{v}$ sa vitesse avant la transformation ; on aura pour les mêmes quantités ρ' et $\boldsymbol{v'}$ après la transformation (transformation de Lorentz liée à la vitesse β avec la vitesse c de la lumière pour unité et avec $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$) :

$$\rho' = \gamma l^{-3}(1 - \beta v_x) \ ; \ \rho' v'_x = \gamma l^{-3} \rho (v_x - \beta) \ ; \ \rho' v'_y = l^{-3} \rho v_y \ ; \ \rho' v'_z = l^{-3} \rho v_z \qquad (2)$$

(Rappelons que Poincaré sera conduit à montrer que $l = 1$.)

Ces formules diffèrent un peu de celles qui avaient été trouvées par Lorentz.

Soient maintenant $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{f'}$ la force avant et après la transformation, *la force est rapportée à l'unité de volume* ; je trouve :

$$f'_x = \gamma l^{-5}(f_x - \beta \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}) \ ; \qquad f'_y = l^{-5} f_y \ ; \qquad f'_z = l^{-5} f_z \qquad (3)$$

Ces formules diffèrent également un peu de celles de Lorentz ; le terme complémentaire en $\beta \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}$ rappelle un résultat obtenu autrefois par M. Liénard.

Si nous désignons maintenant par $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{F'}$ les forces rapportées non plus à l'unité de volume, mais à l'unité de masse de l'électron, nous aurons :

$$F'_x = \gamma l^{-5}(F_x - \beta \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}) \frac{\rho}{\rho'} \ ; \qquad F'_y = F_y l^{-5} \frac{\rho}{\rho'} \ ; \qquad F'_z = F_z l^{-5} \frac{\rho}{\rho'} \qquad (4)$$

Rappelons qu'un peu plus loin, Poincaré aboutit à $l = 1$; en conséquence les formules (2), (3), (4) furent les premières à donner les transformations relativistes de la densité de charge et des forces correspondantes : Poincaré, aidé par les travaux de Lorentz, fait le pas décisif et bâtit les fondations de la théorie de la relativité.

Il est remarquable que, tout en développant des idées totalement nouvelles dans cet article sur la dynamique de l'électron, Poincaré prenne soin de rendre hommage à Lorentz et ne se mette nullement en avant. C'est le témoignage de Lorentz lui-même qui permettra de rétablir la vérité historique – vérité parfois négligée par certains auteurs – et de rendre ainsi justice à Henri Poincaré, le créateur véritable de la mécanique relativiste et de la théorie de la relativité restreinte.

Ainsi, Lorentz écrit[6] :

« Les formules (4) et (7) (qui correspondent aux formules (1) et (2) ci-dessus) *ne se trouvent pas dans mon mémoire de 1904. C'est que je n'avais pas songé à la voie directe qui y conduit, et cela tient à ce que j'avais l'idée qu'il y a une différence*

[6] Lorentz H. A., « Deux mémoires de Henri Poincaré dans la Physique mathématique », *Acta matematica*, **38**, 1921, page 298, et aussi *Œuvres de Henri Poincaré*, tome 11, pages 251-252, Gauthier-Villars, Paris, 1956.

essentielle entre les systèmes x, y, z, t et x', y', z', t'. Dans l'un, on se sert – telle était ma pensée – d'axes de coordonnées qui ont une position fixe dans l'éther et de ce qu'on peut appeler le "vrai temps" ; dans l'autre système, au contraire, on aurait affaire à de simples grandeurs auxiliaires dont l'introduction n'est qu'un artifice mathématique. En particulier, la variable t' ne pourrait pas être appelée le "temps" dans le même sens que la variable t.

Dans cet ordre d'idées je n'avais pas pensé à décrire les phénomènes dans le système x', y', z', t' exactement de la même manière *que dans le système x, y, z, t, et je n'avais pas défini par les équations (3) et (7) les grandeurs $\boldsymbol{v'}$ et ρ' qui correspondront à $\boldsymbol{v}$ et ρ* (notations modernes). *C'est plutôt par tâtonnement que je suis arrivé à mes formules de transformation qui, avec notre notation actuelle, prennent la forme*

$$\xi' = k^2(\xi + \varepsilon) \ ; \qquad \eta' = k\eta \ ; \qquad \zeta' = k\zeta \ ; \qquad \rho' = \frac{\rho}{kl^3}$$

et que j'ai voulu choisir de manière à obtenir dans le nouveau système les équations les plus simples. J'ai pu voir plus tard dans le Mémoire de Poincaré qu'en procédant plus systématiquemment, j'aurais pu atteindre une plus grande simplification encore. Ne l'ayant pas remarqué, je n'ai pas réussi à obtenir l'invariance exacte des équations ; mes formules restaient encombrées de certains termes qui auraient dû disparaître. Ces termes étaient trop petits pour avoir une influence sensible sur les phénomènes, et je pouvais donc expliquer l'indépendance du mouvement de la Terre que les observations avaient révélée, mais je n'ai pas établi le principe de relativité comme rigoureusement et universellement vrai.

Poincaré, au contraire, a obtenu une invariance parfaite des équations de l'électrodynamique, et il a formulé le "postulat de relativité", termes qu'il a été le premier à employer. En effet, se plaçant au point de vue que j'avais manqué, il a trouvé les formules (4) et (7) (correspondant aux formules (1) et (2) ci-dessus). *Ajoutons qu'en corrigeant ainsi les imperfections de mon travail, il ne me les a jamais reprochées. »*

Reprenons et poursuivons la lecture du texte de la note de Poincaré.

Lorentz est amené également à supposer que l'électron en mouvement prend la forme d'un ellipsoïde aplati ; c'est également l'hypothèse faite par Langevin ; seulement, tandis que Lorentz suppose que deux des axes de l'ellipsoïde demeurent constants, ce qui est en accord avec son hypothèse $l = 1$, Langevin suppose que c'est le volume qui reste constant. Les deux auteurs ont montré que ces deux hypothèses s'accordent avec les expériences de Kaufmann, aussi bien que l'hypothèse primitive d'Abraham (électron sphérique). L'hypothèse de Langevin aurait l'avantage de se suffire à elle-même puisqu'il suffit de regarder l'électron comme déformable et incompressible pour expliquer qu'il prenne, quand il est en mouvement, la forme ellipsoïdale. Mais je montre, d'accord en cela avec Lorentz, qu'elle est incapable de s'accorder avec l'impossibilité d'une expérience montrant le mouvement absolu. Cela tient, ainsi que je l'ai dit, à ce que $l = 1$ est la seule hypothèse pour laquelle l'ensemble des transformations de Lorentz forme un groupe.

Mais avec l'hypothèse de Lorentz, l'accord entre les formules ne se fait pas tout seul ; on l'obtient, et en même temps une explication possible de la contraction de l'électron, en supposant que *l'électron, déformable et compressible, est soumis à une sorte de pression extérieure dont le travail est proportionnel aux variations de volume.*

Je montre, par une application du principe de moindre action, que, dans ces conditions, la compensation est complète si l'on suppose que l'inertie est un phénomène exclusivement électromagnétique, comme on l'admet généralement depuis l'expérience de Kaufmann, et qu'à part la pression constante dont je viens de parler et qui agit sur l'électron, toutes les forces sont d'origine électromagnétiques. On a ainsi l'explication de l'impossibilité de montrer le mouvement absolu et la contraction de tous les corps dans le sens du mouvement terrestre.

Mais ce n'est pas tout ; Lorentz, dans l'ouvrage cité, a jugé nécessaire de compléter son hypothèse en supposant que toutes les forces, quelle qu'en soit l'origine, soient affectées par une translation, de la même manière que les forces électromagnétiques, et que, par conséquent, l'effet produit sur leurs composantes par la transformation de Lorentz est encore défini par les équations (4). »

> Ici Poincaré, en développant l'hypothèse énoncée par Lorentz, étend les transformations de Lorentz à toutes les forces, y compris, comme nous allons le voir, aux forces gravitationnelles.
>
> Il sera le premier à montrer que le postulat de relativité requiert une telle modification des lois de la gravitation avec une propagation non instantanée de celle-ci, mais à seulement la vitesse de la lumière.

Il importait d'examiner cette hypothèse de plus près et en particulier de rechercher quelles modifications elle nous obligerait à apporter aux lois de la gravitation. C'est ce que j'ai cherché à déterminer ; j'ai d'abord été conduit à supposer que la propagation de la gravitation n'est pas instantanée, mais se fait avec la vitesse de la lumière. Cela semble en contradiction avec un résultat obtenu par Laplace qui annonce que cette propagation est, sinon instantanée, du moins beaucoup plus rapide que celle de la lumière. Mais, en réalité, la question que s'était posée Laplace diffère considérablement de celle dont nous nous occupons ici. Pour Laplace, l'introduction d'une vitesse finie de propagation était la *seule* modification qu'il apportait à la loi de Newton. Ici, au contraire, cette modification est accompagnée de plusieurs autres ; il est donc possible, et il arrive en effet, qu'il se produise entre elles une compensation partielle.

Quand nous parlerons donc de la position ou de la vitesse du corps attirant, il s'agira de cette position ou de cette vitesse à l'instant où *l'onde gravifique* est partie de ce corps ; quand nous parlerons de la position ou de la vitesse du corps attiré, il s'agira de cette position ou de cette vitesse à l'instant où ce corps attiré a été atteint par l'onde gravifique émanée de l'autre corps ; il est clair que le premier instant est antérieur au second.

Si donc $\boldsymbol{r}$ est le vecteur qui joint les deux positions, si la vitesse du corps attiré est $\boldsymbol{v}$ et celle du corps attirant $\boldsymbol{v_1}$, la force d'attraction $\boldsymbol{F}$ par unité de masse du corps attiré sera une fonction de la masse du corps attirant et des paramètres $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v_1}$. Je me suis demandé s'il était possible de déterminer ces fonctions de telle façon qu'elles soient affectées par la transformation de Lorentz conformément aux équations (4) et que l'on retrouve la loi ordinaire de la gravitation toutes les fois que les vitesses $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{v_1}$ sont assez petites pour que l'on puisse en négliger le carré devant celui de la vitesse de la lumière.

La réponse doit être affirmative. On trouve que l'attraction corrigée se compose de deux forces, l'une parallèle au vecteur $\boldsymbol{r}$ et l'autre à la vitesse $\boldsymbol{v_1}$.

La différence avec la loi ordinaire de la gravitation est, comme je viens de la dire, de l'ordre de $\boldsymbol{v^2}$; si l'on supposait seulement, comme l'a fait Laplace, que la vitesse de propagation est celle de la lumière, cette divergence serait de l'ordre de $\boldsymbol{v}$, c'est-à-dire 10 000 fois plus grande. Il n'est donc pas, à première vue, absurde de supposer que les observations astronomiques ne sont pas assez précises pour déceler une divergence aussi petite que celle que nous imaginons. Mais c'est ce qu'une discussion approfondie permettra seule de décider.

Poincaré crée ainsi la notion d'« ondes gravifiques » ou ondes gravitationnelles dont les interactions mutuelles sont la source des forces de gravitation. Il indique aussi que les corrections relativistes à la loi de Newton sont d'ordre v^2/c^2. Ces résultats lèvent une difficulté notée par Laplace : la lumière et l'action gravitationnelle peuvent se propager avec la même vitesse sans que cela soit contraire aux données de l'observation.

Ainsi, dans cette première étude « sur la dynamique de l'électron », cette note du 5 juin 1905 à l'Académie des Sciences de Paris, Poincaré avait déjà formulé de manière générale et précise les éléments essentiels de la théorie de la relativité : le groupe de Lorentz (sous-groupe de base de ce que l'on appelle aujourd'hui le groupe de Poincaré), l'invariance des équations du champ électromagnétique lors des transformations de Lorentz, les lois de transformation des charges, des courants et des forces, les formules d'addition des vitesses et, surtout, l'extension de tous ces phénomènes à l'ensemble des domaines et forces de la nature quelles que soient leurs origines. C'était là un développement naturel du principe de relativité qu'il avait postulé l'année précédente et cela le conduisit aussitôt aux ondes gravitationnelles se déplaçant à la vitesse de la lumière.

Henri Poincaré
Sur la dynamique de l'électron

(texte du 23 juillet 1905[7])

INTRODUCTION

Il semble au premier abord que l'aberration de la lumière et les phénomènes optiques et électriques qui s'y rattachent vont nous fournir un moyen de déterminer le mouvement absolu de la Terre, ou plutôt son mouvement, non par rapport aux autres astres, mais par rapport à l'éther. Fresnel l'avait déjà tenté, mais il reconnut bientôt que le mouvement de la Terre n'altère pas les lois de la réfraction et de la réflexion. Les expériences analogues, comme celle de la lunette pleine d'eau et toutes celles où l'on ne tient compte que des termes du premier ordre par rapport à l'aberration, ne donnèrent non plus que des résultats négatifs ; on en découvrit bientôt l'explication ; mais Michelson, ayant imaginé une expérience où les termes dépendant du carré de l'aberration devenaient sensibles, échoua à son tour.

Il semble que cette impossibilité de mettre en évidence expérimentalement le mouvement absolu de la Terre soit une loi générale de la Nature ; nous sommes naturellement portés à admettre cette loi, que nous appellerons le *Postulat de Relativité* et à l'admettre sans restriction. Que ce postulat, jusqu'ici en accord avec l'expérience, doive être confirmé ou infirmé plus tard par des expériences plus précises, il est en tout cas intéressant de voir quelles peuvent en être les conséquences.

> Rappelons que le **postulat de Relativité**, le postulat d'impossibilité totale de détermination du mouvement absolu a été mentionné par Henri Poincaré non seulement dans sa note à l'Académie détaillée ci-dessus, mais aussi, dès l'année précédente, dans son exposé au Congrès scientifique mondial de Saint-Louis (Missouri)[8].

Une explication a été proposée par Lorentz et Fitzgerald, qui ont introduit l'hypothèse d'une contraction subie par tous les corps dans le sens du mouvement de la Terre, et proportionnelle au carré de l'aberration ; cette contraction, que nous appellerons la *contraction lorentzienne*, rendrait compte de l'expérience de Michelson et de toutes celles qui ont été réalisées jusqu'ici. L'hypothèse deviendrait

[7] Poincaré H., « Sur la dynamique de l'électron », *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 21, p. 129–175, reçu le 23 juillet 1905, publié en janvier 1906.

[8] Voir la référence 4 ci-dessus et le texte correspondant.

insuffisante, toutefois, si l'on voulait admettre dans toute sa généralité le postulat de relativité.

Lorentz a cherché alors à la compléter et à la modifier de façon à la mettre en concordance parfaite avec ce postulat. C'est ce qu'il a réussi à faire dans son article intitulé *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light* (*Proceedings* de l'Académie d'Amsterdam, 27 mai 1904)[9].

L'importance de la question m'a déterminé à la reprendre ; les résultats que j'ai obtenus sont d'accord avec ceux de M. Lorentz sur tous les points importants ; j'ai été seulement conduit à les modifier et à les compléter dans quelques points de détails ; on verra plus loin les différences qui sont d'une importance secondaire.

> Pour bien comprendre ces lignes, il faut se rappeler que déjà, dans sa note à l'Académie, Poincaré attribue à Lorentz sa compréhension du problème et en parle en disant plusieurs fois « l'idée de Lorentz », bien que Lorentz, comme celui-ci le reconnaîtra plus tard, n'aie pas été aussi loin que le dit Poincaré.
>
> Ce point particulier de la psychologie et de la générosité de Poincaré n'a pas toujours été bien compris de ses lecteurs, même si une lecture attentive ne permet pas d'en douter.

L'idée de Lorentz peut se résumer ainsi : si on peut, sans qu'aucun des phénomènes apparents soit modifié, imprimer à tout le système une translation commune, c'est que les équations d'un milieu électromagnétique ne sont pas altérées par certaines transformations que nous appellerons *transformations de Lorentz* ; deux systèmes l'un immobile, l'autre en translation, deviennent ainsi l'image exacte l'un de l'autre.

> Ces derniers mots montrent à quel point Poincaré comprenait clairement et formulait avec précision l'équivalence de tous les systèmes de référence inertiels liés entre eux par les transformations de Lorentz. En accord avec le principe de relativité, ceci mène effectivement à l'impossibilité totale de déterminer le mouvement absolu par quelque phénomène physique que ce soit (mécanique, optique, électromagnétique, gravitationnel, etc.).
>
> Il faut noter ici une différence essentielle avec le point de vue de Lorentz. Celui-ci traite de « vrai temps » le paramètre t associé au système « fixe », le paramètre t' n'étant à ses yeux qu'un artifice mathématique (voir ci-dessus le texte de Lorentz associé à la référence 5 et surtout le long texte associé à la référence 6).
>
> Mais reprenons la lecture du texte de Poincaré.

Langevin[10] avait cherché à modifier l'idée de Lorentz ; pour les deux auteurs, l'électron en mouvement prend la forme d'un ellipsoïde aplati, mais pour Lorentz, deux des axes de l'ellipsoïde demeurent constants ; pour Langevin, au contraire, c'est le volume de l'ellipsoïde qui demeure constant. Les deux savants ont d'ailleurs

---

[9] Lorentz H. A., *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light, Proceedings* de l'Académie Royale d'Amsterdam, 6, 27 mai 1904, page 809.

[10] Langevin avait été devancé par M. Bucherer de Bonn, qui a émis avant lui la même idée (voir Bucherer, *Mathematische Einführung in die Elektronentheorie*, août 1904, Teubner, Leipzig).

montré que ces deux hypothèses s'accordent avec les expériences de Kaufmann, aussi bien que l'hypothèse primitive d'Abraham (électron sphérique indéformable).

L'avantage de la théorie de Langevin, c'est qu'elle ne fait intervenir que les forces électromagnétiques et les forces de liaisons ; mais elle est incompatible avec le postulat de relativité ; c'est ce que Lorentz avait montré, c'est ce que je retrouve à mon tour par une autre voie en faisant appel à la théorie des groupes.

Il faut donc en revenir à la théorie de Lorentz ; mais si l'on veut la conserver et éviter d'intolérables contradictions, il faut supposer une force spéciale qui explique à la fois la contraction et la constance de deux des axes. J'ai cherché à déterminer cette force, j'ai trouvé qu'*elle peut être assimilée à une pression extérieure constante, agissant sur l'électron déformable et compressible, et dont le travail est proportionnel aux variations du volume de cet électron.*

Si alors l'inertie de la matière était exclusivement d'origine électromagnétique, comme on l'admet généralement depuis l'expérience de Kaufmann, et qu'à part cette pression constante dont je viens de parler, toutes les forces soient d'origine électromagnétique, le postulat de relativité peut être établi en toute rigueur. C'est ce que je montre par un calcul très simple fondé sur le principe de moindre action.

Mais ce n'est pas tout. Lorentz, dans l'ouvrage cité, a jugé nécessaire de compléter son hypothèse de façon à ce que le postulat subsiste quand il y a d'autres forces que les forces électromagnétiques. D'après lui, toutes les forces, quelle qu'en soit l'origine, sont affectées par la transformation de Lorentz (et par conséquent par une translation) de la même manière que les forces électromagnétiques.

Les assertions de Poincaré sont donc tout à fait claires et sans équivoque ; néanmoins, P. A. M. Dirac écrivait encore en 1980 : *"In one aspect Einstein went much further than Lorentz, Poincaré and others, namely in assuming that the Lorentz transformations should be applied in all physics and not only in the case of phenomena related to electrodynamics. Any physical forces, that may be introduced in the future, must be consistent with the Lorentz transformations*[11] *»* (« Il est un domaine où Einstein alla plus loin que Lorentz, Poincaré et tous les autres : en supposant que les transformations de Lorentz doivent être appliquées à toute la Physique et pas seulement aux phénomènes liés à l'électrodynamique. Toutes les forces physiques qui pourront être découvertes devront être en accord avec les transformations de Lorentz. »).

Des opinions analogues sont parfois exprimées, encore aujourd'hui, par des physiciens de rang moins élevé, sans parler des auteurs qui n'ont qu'une vague idée de la Physique mais qui écrivent quand même que Poincaré n'a pas fait le pas décisif dans la création de la théorie de la relativité.

Il suffit de répondre avec le texte même de Poincaré et si certains ne l'ont pas compris, en particulier parce que son vocabulaire scientifique était celui de 1900 et non celui de 1935, ce n'est évidemment pas la faute de Poincaré.

En comparant ce qu'écrit Poincaré avec ce qu'en dit Dirac, on est obligé de relever une injustice : Poincaré, le premier, avait étendu les transformations de Lorentz à toutes les forces de la nature.

[11] Dirac P. A. M., *Collection dedicated to Einstein*, 1982-1983, Moscou : Nauka, p. 218, 1986.

Il est étonnant de voir combien de gens ont attribué à Poincaré leur propre incompréhension. Pourtant, n'est-il pas clair qu'en formulant le principe ou postulat de relativité, le postulat de l'impossibilité totale de la détermination du mouvement absolu comme il le précise dans son premier texte, il insistait sur le caractère universel de son application à tous les types de forces ? Et si, comme d'habitude, il attribue modestement à Lorentz ses idées, c'est tout de même lui qui a remarqué que l'ensemble des transformations de Lorentz formait un groupe mathématique, et en a déduit les lois correctes de transformations des forces et des autres quantités physiques ainsi que la nature générale des lois relativistes, et ce, indépendamment de la nature des forces étudiées.

Il importait d'examiner cette hypothèse de plus près et en particulier de rechercher quelles modifications elle nous obligerait à apporter aux lois de la gravitation.

On trouve d'abord qu'elle nous force à supposer que la propagation de la gravitation n'est pas instantanée, mais se fait avec la vitesse de la lumière. On pourrait croire que c'est une raison suffisante pour rejeter l'hypothèse, Laplace ayant démontré qu'il ne peut en être ainsi. Mais en réalité, l'effet de cette propagation est compensé, en grande partie, par une cause différente, de sorte qu'il n'y a plus contradiction entre la loi proposée et les observations astronomiques.

Était-il possible de trouver une loi qui satisfît à la condition imposée par Lorentz et qui en même temps se réduisît à la loi de Newton toutes les fois que les vitesses des astres sont assez petites pour qu'on puisse négliger leurs carrés (ainsi que le produit des accélérations par les distances) devant le carré de la vitesse de la Lumière ?

À cette question, ainsi qu'on le verra plus loin, on doit répondre affirmativement.

La loi ainsi modifiée est-elle compatible avec les observations astronomiques ? À première vue, il semble que oui, mais la question ne pourra être tranchée que par une discussion approfondie.

Mais en admettant même que cette discussion tourne à l'avantage de la nouvelle hypothèse, que devons-nous conclure ? Si la propagation de l'attraction se fait avec la vitesse de la lumière, cela ne peut être par une rencontre fortuite, cela doit être parce que c'est une fonction de l'éther ; et alors il faudra chercher à pénétrer la nature de cette fonction, et la rattacher aux autres fonctions du fluide.

On peut légitimement appeler *« principe de Poincaré »* le postulat de relativité, et il est intéressant de noter que, bien que ce postulat entraîne l'impossibilité totale de la détermination du mouvement de la matière par rapport à l'éther, ce dernier n'est tout de même pas rejeté par Poincaré, sans doute parce qu'il est difficile d'imaginer un espace totalement vide. Poincaré se contente d'écrire dans *La science et l'hypothèse*[12]: ***« Peu nous importe que l'éther existe réellement, c'est l'affaire des métaphysiciens... un jour viendra, sans doute, où l'éther sera rejeté comme inutile... Ces hypothèses ne jouent qu'un rôle***

[12] Poincaré H., *La Science et l'Hypothèse*, Flammarion, Paris, 1902, p. 245–246.

secondaire. On pourrait les sacrifier ; on ne le fait pas d'ordinaire parce que l'exposition y perdrait en clarté, mais cette raison est la seule. »

Beaucoup de personnes considèrent que l'élimination de l'éther est l'un des très grands succès de la théorie de la relativité, mais c'est là une simple question de vocabulaire et de définition des propriétés du vide : l'éther est aujourd'hui remplacé par les différents champs (quantique, électromagnétique, etc.).

Poincaré n'est d'ailleurs pas le seul à avoir ce point de vue ; Einstein lui-même ne conclut-il pas sa fameuse conférence de Leyde du 5 mai 1920 par ces mots[13] : *« En résumant, nous pouvons dire : d'après la théorie de la relativité générale, l'espace est doué de propriétés physiques ; dans ce sens, par conséquent, un éther existe. Selon la théorie de la relativité générale, un espace sans éther est inconcevable, car non seulement la propagation de la lumière y serait impossible, mais il n'y aurait aucune possibilité d'existence pour les règles et les horloges et, par conséquent, pour les distances spatio-temporelles dans le sens de la physique. Cet éther ne doit cependant pas être conçu comme étant doué de la propriété qui caractérise le mieux les milieux pondérables, c'est-à-dire comme constitué de parties pouvant être suivies dans le temps : la notion de mouvement ne doit pas lui être appliquée. »*

Nous ne pouvons nous contenter de formules simplement juxtaposées et qui ne s'accorderaient que par un hasard heureux ; il faut que ces formules arrivent pour ainsi dire à se pénétrer mutuellement. L'esprit ne sera satisfait que quand il croira apercevoir la raison de cet accord, au point d'avoir l'illusion qu'il aurait pu le prévoir.

Mais la question peut encore se présenter à un autre point de vue, qu'une comparaison fera mieux comprendre. Supposons un astronome antérieur à Copernic et réfléchissant sur le système de Ptolémée ; il remarquera que pour toutes les planètes, un des deux cercles, épicycle ou déférent, est parcouru dans le même temps. Cela ne peut être par hasard, il y a donc entre toutes les planètes je ne sais quel lien mystérieux.

Mais Copernic, en changeant simplement les axes de coordonnées regardés comme fixes, fait évanouir cette apparence ; chaque planète ne décrit plus qu'un seul cercle et les durées des révolutions deviennent indépendantes (jusqu'à ce que Képler rétablisse entre elles le lien que l'on avait cru détruit).

Ici, il est possible qu'il y ait quelque chose d'analogue ; si nous admettions le postulat de relativité, nous trouverions dans la loi de la gravitation et dans les lois électromagnétiques un nombre commun qui serait la vitesse de la lumière ; et nous le retrouverions encore dans toutes les autres forces d'origine quelconque, ce qui ne pourrait s'expliquer que de deux manières :

Ou bien il n'y aurait rien au monde qui ne fût d'origine électromagnétique.

[13] Einstein A., « Réflexions sur l'électrodynamique, l'éther, la géométrie et la relativité ». Conférence faite à l'Université de Leyde le 5 mai 1920. Collection discours de la Méthode, dirigée par Maurice Rybak. Traduction par Maurice Solovine et M. A. Tonnelat, pages 63–74. Nouvelle édition Gauthier-Villars, 1972.

Ou bien cette partie qui serait pour ainsi dire commune à tous les phénomènes physiques ne serait qu'une apparence, quelque chose qui tiendrait à nos méthodes de mesures. Comment faisons-nous nos mesures ? En transportant, les uns sur les autres, des objets regardés comme des solides invariables, répondra-t-on d'abord ; mais cela n'est plus vrai dans la théorie actuelle, si l'on admet la contraction lorentzienne. Dans cette théorie, deux longueurs égales sont, par définition, deux longueurs que la lumière met le même temps à parcourir.

Peut-être suffirait-il de renoncer à cette définition pour que la théorie de Lorentz fût aussi complètement bouleversée que l'a été le système de Ptolémée par l'intervention de Copernic. Si cela arrive un jour, cela ne prouvera pas que l'effort fait par Lorentz ait été inutile ; car Ptolémée, quoi qu'on en pense, n'a pas été inutile à Copernic.

Aussi n'ai-je pas hésité à publier ces quelques résultats partiels, bien qu'en ce moment même la théorie entière puisse sembler être mise en danger par la découverte des rayons magnétocathodiques.

1. Transformation de Lorentz

Lorentz a adopté un système particulier d'unités, de façon à faire disparaître les facteurs 4π dans les formules. Je ferai de même et, de plus je choisirai les unités de longueur et de temps de telle façon que la vitesse de la lumière soit égale à l'unité de vitesse. Dans ces conditions, en appelant (*notations modernes*) $\boldsymbol{E}$ le champ électrique, $\boldsymbol{D}$ l'induction électrique, $\boldsymbol{H}$ le champ magnétique, $\boldsymbol{B}$ l'induction magnétique, $\boldsymbol{A}$ le potentiel vecteur, φ le potentiel scalaire, ρ la densité électrique de charge, $\boldsymbol{v}$ la vitesse de l'électron, $\boldsymbol{g}$ la densité totale de courant, μ la perméabilité magnétique du vide et ε sa permittivité, les formules fondamentales deviennent :

$$\left.\begin{array}{ll}
\boldsymbol{g} = \rho\boldsymbol{v} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \operatorname{rot} \boldsymbol{H} & \\[2ex]
\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \ ; & \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\varphi \\[2ex]
\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \boldsymbol{E} & \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \\[2ex]
\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho & \mu\varepsilon\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0 \\[2ex]
\varepsilon \Box \varphi = -\rho & \Box \boldsymbol{A} = -\mu\rho\boldsymbol{v} \\[2ex]
\Box = \nabla^2 - \mu\varepsilon\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu\varepsilon\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} &
\end{array}\right\} \qquad (5)$$

À ces équations de Maxwell, et en l'absence d'anisotropie et d'hystérésis, nous pouvons ajouter les relations :

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \ ; \qquad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{6}$$

Ajoutons enfin les relations désormais classiques : $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$, conséquence de $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, et $1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ = vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide = unité de vitesse. On pourrait donc remplacer les produits $\mu\varepsilon$ par 1 ; on ne le fera pas en général afin de faciliter les analyses dimensionnelles.

Un élément de matière de volume $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ subit une force mécanique $\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\tau$ donnée par :

$$\boldsymbol{f} = \rho(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{7}$$

Ces équations sont susceptibles d'une transformation remarquable découverte par Lorentz et qui doit son intérêt à ce qu'elle explique pourquoi aucune expérience n'est susceptible de nous faire connaître le mouvement absolu de l'Univers. Posons :

$$x' = \gamma l(x - \beta t) \ ; \qquad t' = \gamma l(t - \beta x) \ ; \qquad y' = ly \ ; \qquad z' = lz \tag{8}$$

l et β étant deux constantes quelconques, et où :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{9}$$

Notons que γ est un scalaire tandis que β est une vitesse, la vitesse du second référentiel par rapport au premier. En toute rigueur on devrait donc écrire :
$x' = \gamma l(x - \beta\mu\varepsilon t)$ et $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta^2\mu\varepsilon}}$

Si alors nous posons :

$$\Box' = \nabla'^2 - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \tag{10}$$

il viendra :

$$\Box' = l^{-2}\,\Box \tag{11}$$

Considérons une sphère entraînée avec l'électron dans un mouvement de translation uniforme, et soit :

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}\,t)^2 = r^2 \tag{12}$$

l'équation de cette sphère mobile dont le volume est $4\pi r^3/3$.

La transformation la changera en un ellipsoïde dont il est aisé de trouver l'équation. On déduit en effet aisément des équations (8) :

$$x = \frac{\gamma}{l}(x' + \beta t') \ ; \qquad t = \frac{\gamma}{l}(t' + \beta x') \ ; \qquad y = \frac{y'}{l} \ ; \qquad z = \frac{z'}{l} \tag{13}$$

L'équation de l'ellipsoïde devient ainsi :

$$\gamma^2(x'+\beta t'-v_xt'-v_x\beta x')^2+\big[y'-\gamma v_y(t'+bx')\big]^2+\big[z'-\gamma v_z(t'+\beta x')\big]^2=l^2r^2 \quad (14)$$

Cet ellipsoïde se déplace d'un mouvement uniforme ; pour $t'=0$, il se réduit à :

$$\gamma^2x'^2(1-v_x\beta)^2+(y'-\gamma v_yx')^2+(z'-\gamma v_zx')^2=l^2r^2 \quad (15)$$

et a pour volume :

$$\frac{4}{3}\pi r^3\frac{l^3}{\gamma(1-v_x\beta)} \quad (16)$$

Si l'on veut que la charge de l'électron ne soit pas altérée par la transformation et si l'on appelle ρ' la nouvelle densité électrique, il viendra :

$$\rho'=\frac{\gamma}{l^3}\rho(1-\beta v_x) \quad (17)$$

Que seront maintenant les nouvelles vitesses v'_x, v'_y, v'_z ? On devra avoir :

$$\textit{(Règle d'addition des vitesses)}\left\{\begin{aligned} v'_x&=\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}(x-\beta t)}{\mathrm{d}(t-\beta x)}=\frac{v_x-\beta}{1-\beta v_x}\\ v'_y&=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}y}{\gamma\mathrm{d}(t-\beta x)}=\frac{v_y}{\gamma(1-\beta v_x)}\\ v'_z&=\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}z}{\gamma\mathrm{d}(t-\beta x)}=\frac{v_z}{\gamma(1-\beta v_x)}\end{aligned}\right. \quad (18)$$

d'où :

$$\rho'v'_x=\frac{\gamma}{l^3}\rho(v_x-\beta)\ ;\qquad \rho'v'_y=\frac{1}{l^3}\rho\, v_y\ ;\qquad \rho'v'_z=\frac{1}{l^3}\rho\, v_z \quad (19)$$

C'est ici que je dois signaler pour la première fois une divergence avec Lorentz. Lorentz pose (à la différence des notations près)[14] :

$$\rho'=\frac{1}{\gamma l^3}\rho\ ;\qquad v'_x=\gamma^2(v_x-\beta)\ ;\qquad v'_y=\gamma\, v_y\ ;\qquad v'_z=\gamma\, v_z \quad (20)$$

On retrouve ainsi les trois expressions (19), mais la valeur de ρ' diffère.

Il importe de remarquer que les formules (17) et (19) satisfont à la condition de continuité :

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t'}+\operatorname{div}(\rho'\boldsymbol{v'})=0 \quad (21)$$

[14] LORENTZ H. A., "Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light", *Proceedings* de l'Académie royale d'Amsterdam, 6, p. 813, formules (7) et (8), 27 mai 1904.

Soit en effet λ une quantité indéterminée et D le jacobien des quatre fonctions :

$$t + \lambda\rho \; ; \qquad x + \lambda\rho\, v_x \; ; \qquad y + \lambda\rho\, v_y \; ; \qquad z + \lambda\rho\, v_z \tag{22}$$

par rapport à t, x, y, z. On aura :

$$D = D_0 + D_1\lambda + D_2\lambda^2 + D_3\lambda^3 + D_4\lambda^4 \tag{23}$$

avec :

$$D_0 = 1 \; ; \qquad D_1 = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\,\boldsymbol{v}) = 0 \tag{24}$$

Soit $\lambda' = l^4\lambda$. Nous voyons que les quatre fonctions :

$$t' + \lambda'\rho' \; ; \qquad x' + \lambda'\rho' v'_x \; ; \qquad y' + \lambda'\rho' v'_y \; ; \qquad z' + \lambda'\rho' v'_z \tag{25}$$

sont liées aux fonctions (22) par les mêmes relations linéaires que les variables anciennes aux variables nouvelles. Si donc on désigne par D' le jacobien des fonctions (25) par rapport aux variables nouvelles, on aura :

$$D' = D \; ; \qquad D' = D'_0 + D'_1\lambda' + \cdots + D'_4\lambda'^4 \tag{26}$$

d'où :

$$D'_0 = D_0 = 1 \; ; \qquad D'_1 = \frac{D_1}{l^4} = 0 = \frac{\partial\rho'}{\partial t'} + \operatorname{div}(\rho'\boldsymbol{v'}) \qquad \text{c.q.f.d.} \tag{27}$$

Avec l'hypothèse de Lorentz, cette condition ne serait pas remplie puisque ρ' n'a pas la même valeur.

Nous définirons les nouveaux potentiels, vecteur et scalaire, de façon à satisfaire aux conditions :

$$\varepsilon\,\Box'\varphi' = -\rho' \; ; \qquad \Box'\boldsymbol{A'} = -\mu\rho'\boldsymbol{v'} \tag{28}$$

Nous tirerons ensuite de là :

$$\varphi' = \frac{\gamma}{l}(\varphi - \beta A_x) \; ; \qquad A'_x = \frac{\gamma}{l}(A - \beta\mu\varepsilon\varphi) \; ; \qquad A'_y = \frac{A_y}{l} \; ; \qquad A'_z = \frac{A_z}{l} \tag{29}$$

Ces formules diffèrent notablement de celles de Lorentz, mais la divergence ne porte en dernière analyse que sur les définitions.

Nous choisirons les nouveaux champs électrique et magnétique de façon à satisfaire aux équations :

$$\boldsymbol{E'} = -\frac{\partial\boldsymbol{A'}}{\partial t'} - \nabla\varphi' \; ; \qquad \boldsymbol{B'} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A'} \tag{30}$$

Il est aisé de voir que :

$$\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\gamma}{l}\left[\frac{\partial}{\partial t}+\beta\frac{\partial}{\partial x}\right]\ ;\ \frac{\partial}{\partial x'}=\frac{\gamma}{l}\left[\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial t}\right]\ ;\ \frac{\partial}{\partial y'}=\frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial y}\ ;\quad \frac{\partial}{\partial z'}=\frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial z} \tag{31}$$

et on en conclut :

$$\left.\begin{array}{lll} E'_x=\dfrac{1}{l^2}E_x\ ; & E'_y=\dfrac{\gamma}{l^2}(E_y-\beta B_z)\ ; & E'_z=\dfrac{\gamma}{l^2}(E_z+\beta B_y) \\ B'_x=\dfrac{1}{l^2}B_x\ ; & B'_y=\dfrac{\gamma}{l^2}(B_y+\beta E_z)\ ; & B'_z=\dfrac{\gamma}{l^2}(B_z-\beta E_y) \end{array}\right\} \tag{32}$$

Ces formules sont identiques à celles de Lorentz.

Notre transformation n'altère pas les équations (5). En effet, la condition de continuité (21), ainsi que les équations (28) et (30), nous fournissent déjà quelques unes des équations (5) (sauf l'accentuation des lettres).

Les équations (29) rapprochées de la condition de continuité (21) donnent :

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial t'}+\operatorname{div}\boldsymbol{A'}=0 \tag{33}$$

Il reste à établir que :

$$\frac{\partial\boldsymbol{D'}}{\partial t'}+\rho'\boldsymbol{v'}=\operatorname{rot}\boldsymbol{H'}\ ;\qquad \frac{\partial\boldsymbol{B'}}{\partial t'}=-\operatorname{rot}\boldsymbol{E'}\ ;\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{D'}=\rho' \tag{34}$$

et l'on voit aisément que ce sont des conséquences nécessaires des équations (28), (30) et (33).

Nous devons maintenant comparer les forces avant et après la transformation.

Soit $\boldsymbol{f}$ la force, et $\boldsymbol{f'}$ la force après la transformation, toutes deux rapportées à l'unité de volume. Pour que $\boldsymbol{f'}$ satisfasse aux mêmes équations qu'avant la transformation, on doit avoir :

$$\boldsymbol{f'}=\rho'(\boldsymbol{E'}+\boldsymbol{v'}\times\boldsymbol{B'}) \tag{35}$$

ou, en remplaçant toutes les quantités par leur valeurs (17), (19) et (32), en tenant compte des équations (7) :

$$f'_x=\frac{\gamma}{l^5}(f_x-\beta\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v})\ ;\qquad f'_y=\frac{1}{l^5}f_y\ ;\qquad f'_z=\frac{1}{l^5}f_z \tag{36}$$

Si nous représentions par $\boldsymbol{F_u}$ la force rapportée, non plus à l'unité de volume, mais à l'unité de charge électrique de l'électron, et par $\boldsymbol{F'_u}$ la force après la transformation, nous aurions :

$$\boldsymbol{F_u}=\frac{\boldsymbol{f}}{\rho}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\ ;\qquad \boldsymbol{F'_u}=\frac{\boldsymbol{f'}}{\rho'}=\boldsymbol{E'}+\boldsymbol{v'}\times\boldsymbol{B'} \tag{37}$$

et nous aurions les équations :

$$F'_{ux} = \frac{\gamma}{l^5}\frac{\rho}{\rho'}(F_{ux} - \beta \boldsymbol{F_u} \cdot \boldsymbol{v}) \ ; \qquad F'_{uy} = \frac{1}{l^5}\frac{\rho}{\rho'}F_{uy} \ ; \qquad F'_{uz} = \frac{1}{l^5}\frac{\rho}{\rho'}F_{uz} \qquad (38)$$

Lorentz avait trouvé (à la différence des notations près), page 813, formule (10)[15] :

$$\left.\begin{aligned} F_{ux} &= l^2\big[F'_{ux} + \beta(v'_y E'_y + v'_z E'_z)\big] \\ F_{uy} &= \frac{l^2}{\gamma}(F'_{uy} - \beta v'_x E'_y) \\ F_{uz} &= \frac{l^2}{\gamma}(F'_{uz} - \beta v'_x E'_z) \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

Avant d'aller plus loin, il importe de rechercher la cause de cette importante divergence. Elle tient évidemment à ce que les formules pour $\boldsymbol{v}$ ne sont pas les mêmes, tandis que les formules pour les champs électrique et magnétique sont les mêmes.

> En 1921, dans un texte préparé pour une encyclopédie mathématique[16] et consacré à : « Discussion de trois textes par Lorentz, Poincaré et Einstein dans lesquels furent établies les fondations de la théorie de la relativité, » Wolfgang Pauli écrit ceci :
>
> *« Les lacunes formelles laissées par Lorentz furent remplies par Poincaré. Ce dernier formula le principe de relativité comme une règle générale et rigoureuse. Poincaré, comme d'ailleurs les autres auteurs sus-mentionnés, suppose que les équations de Maxwell sont valables même dans le vide, et il en déduit que toutes les lois de la nature doivent être covariantes par rapport aux transformations de Lorentz.*[17] *L'invariance des dimensions d'un corps dans les directions perpendiculaires à son mouvement est une conséquence naturelle de la nécessité, pour l'ensemble des transformations de Lorentz, de former un groupe mathématique, groupe dont l'ensemble des rotations ordinaires des axes de coordonnées est un sous-groupe. De plus Poincaré corrigea les formules de transformation données par Lorentz pour la densité de charge et la vitesse et obtint ainsi une totale covariance des équations de la théorie de l'électron. »*
>
> Soulignons que Poincaré fut le premier à démontrer que, pour obtenir une covariance générale des lois de la nature par rapport aux transformations de Lorentz, il est nécessaire que les champs physiques, les forces et les autres caractéristiques cinématiques ou dynamiques se transforment selon des lois tensorielles bien précises

---

[15] LORENTZ H. A., "Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light", *Proceedings* de l'Académie royale d'Amsterdam, **6**, p. 813, formule (10), 27 mai 1904.

[16] PAULI W., *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Leipzig-Verlag und Drück von B.G. Teubner. Relativitätstheorie V-2, p. 545-546 (1904-1922).

[17] C'est précisément dans ces deux travaux de Poincaré, ceux-là mêmes que nous analysons dans ce livre, que les termes de « transformation de Lorentz » et de « groupe de Lorentz » apparaissent pour la première fois.

liées à ces transformations de Lorentz.Il arriva ainsi à la conclusion que les potentiels vecteur et scalaire ($\boldsymbol{A}$, φ), la densité de courant et celle de charge ($\boldsymbol{j}$, ρ) et les coordonnées d'espace-temps (x, y, z, t) sont transformés par les mêmes lois linéaires, lesquelles correspondent à ce qu'aujourd'hui, après Minkowski, nous qualifions de vecteur quadridimensionnel ou tenseur de rang un.

Il s'ensuit, de manière tout à fait naturelle, les lois de transformation du champ électrique $\boldsymbol{E}$ et de l'induction magnétique $\boldsymbol{B}$.

Plus tard, le développement de ces idées fut poursuivi par Minkowski, qui démontra que $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ forment un « hexa-vecteur » ou tenseur antisymétrique de rang deux (voir ci-dessous en (46)).

Il arrive souvent que la preuve de la covariance des équations de Maxwell-Lorentz soit analysée de manière ambiguë. Pauli lui-même écrit dans son livre *La théorie de la relativité*[18] :

« Le travail de Lorentz, publié avant les autres, contient, pour établir la preuve de la covariance des équations de Maxwell par rapport aux coordonnées de la forme... Ceci ne fut cependant rigoureusement démontré que pour les équations relatives à un espace dépourvu de charges électriques... La preuve complète fut donnée indépendamment par Poincaré et Einstein. »

Cependant la vérité oblige à dire que d'une part, pour établir la covariance des équations de Maxwell, Lorentz aurait dû montrer la nature de groupe de ses transformations et établir que leur application au champ électromagnétique conduisait à une représentation de groupe, ce que non seulement il n'a pas fait mais qu'apparemment il ne ressentait pas la nécessité de faire. D'autre part, la démonstration d'Einstein reste incomplète : il n'a pas montré que la force de Lorentz elle aussi se transformait selon les mêmes lois. Il nous faut donc reconnaître la priorité de Poincaré réconciliant l'électromagnétisme et le principe de relativité, à l'aide des transformations de Lorentz :

Si l'énergie des électrons est exclusivement d'origine électromagnétique, si de plus ils ne sont soumis qu'à des forces d'origine électromagnétique, la condition d'équilibre exige que l'on ait à l'intérieur des électrons :

$$\boldsymbol{f} = 0 \tag{40}$$

Or, en vertu des équations (36), cette relation équivaut à :

$$\boldsymbol{f'} = 0 \tag{41}$$

Les conditions d'équilibre des électrons ne sont donc pas altérées par la transformation.

Il faut souligner ici que Poincaré montre très clairement que la force de Lorentz par unité de volume est une quantité qui conserve sa forme lors du passage d'un système de référence à un autre. Les vecteurs $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{f'}$ sont fonction de ρ, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, ρ', $\boldsymbol{E'}$, $\boldsymbol{B'}$, mais la transformation (36) qui permet de passer de l'un à l'autre n'en dépend pas.

[18] Pauli W., *Relativity theory*, Moscow-Leningrad : OGIZ-Gostekhizdat, 1947, p. 12 et 118.

Ainsi, Poincaré fut le premier à obtenir les lois correctes de la transformation de la force agissant sur une charge placée dans un champ électromagnétique. Cela lui permet d'établir la covariance relativiste des conditions d'équilibre d'une particule chargée, même quand des forces additionnelles sont introduites.

Malheureusement, une hypothèse aussi simple est inadmissible. Si, en effet, on suppose $\boldsymbol{v} = 0$, la condition $\boldsymbol{f} = 0$ entraîne $\boldsymbol{E} = 0$ et par conséquent $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$, c'est-à-dire $\rho = 0$. On arriverait à des résultats analogues dans le cas le plus général. Il faut donc bien admettre qu'il y a outre les forces électromagnétiques, soit d'autres forces, soit des liaisons. Il faut alors chercher à quelles conditions doivent satisfaire ces forces ou ces liaisons pour que l'équilibre des électrons ne soit pas troublé par la transformation. Ce sera l'objet d'un paragraphe ultérieur.

2. Principe de moindre action

On sait comment Lorentz a déduit ses équations du principe de moindre action. Je reviendrai cependant sur la question, bien que je n'aie rien d'essentiel à ajouter à l'analyse de Lorentz, parce que je préfère la présenter sous une forme un peu différente qui me sera utile pour mon objet. Je poserai :

$$J = \int \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\tau \left(\frac{\varepsilon \boldsymbol{E}^2}{2} + \frac{\boldsymbol{B}^2}{2\mu} - \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{A} \right) \tag{42}$$

en supposant que $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{g}$... sont assujetties aux conditions suivantes :

$$\varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \rho \; ; \qquad \boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \tag{43}$$

et

$$\boldsymbol{g} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \rho \boldsymbol{v} \; ; \qquad (\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}) \tag{44}$$

La fonction lagrangienne utilisée par Poincaré pour l'interaction d'un champ électromagnétique avec un ensemble de charges ponctuelles est, à un signe près, l'expression relativiste invariante adoptée aujourd'hui :

$$L = -\frac{\boldsymbol{F}_{\mu\nu}^2}{4} - \boldsymbol{j}_\mu \boldsymbol{A}_\mu \tag{45}$$

où $\boldsymbol{A}_\mu$ désigne les quatre composantes du vecteur $(-\varphi, \ \boldsymbol{A})$, et $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ les seize composantes du tenseur antisymétrique de champ électromagnétique :

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}_\mu = \begin{vmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{vmatrix} \tag{46}$$

Il faut souligner que la formulation actuelle du principe de moindre action est basée sur un lagrangien de la forme $L = -\boldsymbol{F}_{\mu\nu}^2/4$ et sur les relations (46), ce qui est équivalent à sélectionner les deux équations de Maxwell $\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$ et $\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ comme conditions de couplage.

Poincaré, lui, choisissait une autre paire d'équations de Maxwell : les équations $\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$ et $\operatorname{div}\boldsymbol{D} = \rho$. Il obtenait les équations restantes comme des conséquences du principe de moindre action.

Quand à l'intégrale J, elle doit être étendue :

1° par rapport à l'élément de volume $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, à l'espace tout entier ;

2° par rapport au temps t, à l'intervalle compris entre les limites $t = t_0$, $t = t_1$.

D'après le principe de moindre action, l'intégrale J doit être un minimum, si l'on assujettit les diverses quantité qui y figurent :

1° aux conditions (44) ;

2° à la condition que l'état du système soit déterminé aux deux époques limites $t = t_0$, $t = t_1$.

Cette dernière condition nous permet de transformer nos intégrales à l'aide de l'intégration par parties relativement au temps. Si nous avons en effet une intégrale de la forme :

$$\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau \boldsymbol{A}\frac{\partial(\boldsymbol{B}\,\delta C)}{\partial t} \tag{47}$$

où C est l'une des quantités qui définissent l'état du système et δC sa variation, elle sera égale (en intégrant par parties relativement au temps) à :

$$\int \mathrm{d}\tau \left[\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\,\delta C\right]_{t_0}^{t_1} - \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\boldsymbol{B}\,\delta C \tag{48}$$

Comme l'état du système est déterminé aux deux époques limites, on a $\delta C = 0$ pour $t = t_0$, $t = t_1$; donc la première intégrale qui se rapporte à ces deux époques est nulle, et la seconde subsiste seule.

Nous pouvons de même intégrer par parties par rapport à x, y ou z ; nous avons en effet :

$$\int \boldsymbol{A}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t = \int \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t - \int \boldsymbol{B}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t \tag{49}$$

Nos intégrations s'étendant jusqu'à l'infini, il faut faire $x = \pm\infty$ dans la première intégrale du second membre ; donc, comme nous supposons toujours que toutes nos fonctions s'annulent à l'infini, cette intégrale sera nulle et il viendra :

$$\int \boldsymbol{A}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t = -\int \boldsymbol{B}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \tag{50}$$

Si le système était supposé soumis à des liaisons, il faudrait adjoindre ces conditions de liaison aux conditions imposées aux diverses quantités qui figurent dans l'intégrale J.

Donnons d'abord à $\boldsymbol{A}$ un accroissement $\boldsymbol{\delta A}$, d'où :

$$\boldsymbol{\delta B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{\delta A} \tag{51}$$

$$\delta J = \int \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\tau \left(\frac{\boldsymbol{B} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\delta A}}{\mu} - \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\delta A} \right) = 0 \tag{52}$$

ou, en intégrant par parties (*et compte tenu de* $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$) :

$$\delta J = \int \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\tau \, [\boldsymbol{\delta A} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\delta A}] = \int \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\tau \, \boldsymbol{\delta A} \cdot [\operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \boldsymbol{g}] = 0 \tag{53}$$

d'où, en égalant à zéro le coefficient de l'arbitraire $\boldsymbol{\delta A}$:

$$\boldsymbol{g} = \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \tag{54}$$

Cette relation nous donne (avec une intégration par parties) :

$$\int \mathrm{d}\tau \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{g} = \int \mathrm{d}\tau \boldsymbol{A} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \int \mathrm{d}\tau \, \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{H} \tag{55}$$

ou :

$$\int \mathrm{d}\tau \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{g} = \int \mathrm{d}\tau \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} = \int \mathrm{d}\tau \frac{\boldsymbol{B}^2}{\mu} \tag{56}$$

d'où enfin :

$$J = \int \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\tau \left[\frac{\varepsilon \boldsymbol{E}^2}{2} + \frac{\boldsymbol{B}^2}{2\mu} - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{g} \right] = \int \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\tau \left[\frac{\varepsilon \boldsymbol{E}^2}{2} - \frac{\boldsymbol{B}^2}{2\mu} \right] \tag{57}$$

Désormais, et grâce à la relation (54), δJ est indépendant de $\boldsymbol{\delta A}$ et par conséquent de $\boldsymbol{\delta H}$ et $\boldsymbol{\delta B}$; faisons varier maintenant les autres variables.

Il vient, en revenant à l'expression (43) de J :

$$\delta J = \int \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\tau (\varepsilon \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\delta E} - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\delta g}) \tag{58}$$

Mais $\boldsymbol{E}$ est assujetti à la première condition de (43), de sorte que :

$$\varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{\delta E} = \delta \rho \tag{59}$$

et qu'il convient d'écrire :

$$\delta J = \int \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\tau \big[\varepsilon \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\delta E} - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\delta g} - \psi(\varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{\delta E} - \delta \rho) \big] \tag{60}$$

Les principes du calcul des variations nous apprennent que l'on doit faire le calcul comme si, ψ étant une fonction arbitraire, δJ était représenté par l'expression (60) et si les variations n'étaient plus assujetties à la condition (59).

Nous avons d'autre part, avec (44) :

$$\boldsymbol{\delta g} = \varepsilon \frac{\partial(\boldsymbol{\delta E})}{\partial t} + \delta(\rho \boldsymbol{v}) \tag{61}$$

d'où, après intégration par parties (*et en prenant* $\psi = \varphi =$ potentiel *scalaire*) :

$$\delta J = \int \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\tau\, \varepsilon\, \boldsymbol{\delta E} \left[\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \nabla\varphi\right] + \int \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\tau \big[\varphi\ \delta\rho - \varepsilon \boldsymbol{A} \cdot \delta(\rho\boldsymbol{v})\big] \tag{62}$$

Si nous supposons d'abord que les électrons ne subissent pas de variation, $\delta\rho = 0$, $\delta(\rho\boldsymbol{v}) = 0$, et la seconde intégrale est nulle. Comme δJ doit s'annuler, on doit avoir :

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \nabla\varphi = 0 \tag{63}$$

Il reste donc dans le cas général :

$$\delta J = \int \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\tau \big[\varphi\, \delta\rho - \varepsilon \boldsymbol{A} \cdot \delta(\rho\boldsymbol{v})\big] \tag{64}$$

Il reste à déterminer les forces qui agissent sur les électrons. Pour cela, nous devons supposer qu'on applique à chaque élément d'électron une force complémentaire $-\boldsymbol{f}\mathrm{d}\tau$ et écrire que cette force fait équilibre aux forces d'origine électromagnétique. Soit $\boldsymbol{\xi}$ le déplacement de l'élément $\mathrm{d}\tau$ de l'électron, déplacement compté à partir d'une position initiale quelconque. Soit $\boldsymbol{\delta\xi}$ les variations de ce déplacement ; le travail virtuel correspondant de la force complémentaire sera :

$$-\int \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\delta\xi}\, \mathrm{d}\tau \tag{65}$$

de sorte que la condition d'équilibre dont nous venons de parler s'écrira :

$$\delta J = -\int \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\delta\xi}\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}t \tag{66}$$

Il s'agit de transformer δJ. Pour cela, commençons par chercher l'équation de continuité exprimant que la charge d'un électron se conserve par la variation. Soit $\boldsymbol{r_o}$ la position initiale d'un électron. Sa position actuelle sera :

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_o} + \boldsymbol{\xi} \tag{67}$$

Nous introduirons en outre une variable auxiliaire α, qui produira les variations de nos diverses fonctions, de sorte que, pour une fonction U quelconque, on ait :

$$\delta U = \delta\alpha \frac{\partial U}{\partial \alpha} \tag{68}$$

Il me sera commode en effet de pouvoir passer de la notation du calcul des variations à celle du calcul différentiel ordinaire, ou inversement.

Nos fonctions pourront être regardées : 1° soit comme dépendant des cinq variables x, y, z, t, α, de telle sorte que l'on reste toujours à la même place quand t et α varient seuls : nous désignerons leurs dérivées par des ∂ ronds ; 2° soit comme dépendant des cinq variables x_o, y_o, z_o, t, α, de telle sorte que l'on suive toujours un même électron quand t et α varient seuls : nous désignerons alors leurs dérivées par des d ordinaires. On aura alors :

$$v_x = \frac{\mathrm{d}\xi_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \xi_x}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \xi_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{69}$$

Désignons maintenant par Δ le déterminant de x, y, z par rapport à x_o, y_o, z_o :

$$\Delta = \frac{\partial(x,\, y,\, z)}{\partial(x_\text{o},\, y_\text{o},\, z_\text{o})} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{r}_\mathbf{o}} \tag{70}$$

Si α, x_o, y_o, z_o restant constants, nous donnons à t un accroissement $\mathrm{d}t$, il en résultera pour x, y, z des accroissements $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ et pour Δ un accroissement $\mathrm{d}\Delta$, et l'on aura :

$$\mathbf{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t\ ; \qquad \Delta + \mathrm{d}\Delta = \frac{\partial(\boldsymbol{r} + \mathbf{d}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}_\mathbf{o}} \tag{71}$$

d'où :

$$1 + \frac{\mathrm{d}\Delta}{\Delta} = \frac{\partial(\boldsymbol{r} + \mathbf{d}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{\partial(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t)}{\partial \boldsymbol{r}} \tag{72}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}t} = \operatorname{div} \boldsymbol{v}(t) \tag{73}$$

La masse de chaque électron étant invariable, on aura :

$$\mathrm{d}(\rho\,\Delta) = 0 \tag{74}$$

d'où :

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0\ ; \qquad \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho\ ; \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{75}$$

Telles sont les différentes formes de l'équation de continuité en ce qui concerne la variable t. Nous trouvons des formes analogues en ce qui concerne la variable α.

Soit

$$\boldsymbol{\delta\xi} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}\alpha}\delta\alpha \tag{76}$$

il viendra :

$$\boldsymbol{\delta\xi} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \alpha}\mathrm{d}\alpha + (\boldsymbol{\delta\xi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi} \tag{77}$$

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}\alpha} = \operatorname{div}\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}\alpha}\ ; \qquad \frac{\mathrm{d}(\rho\Delta)}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \tag{78}$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\alpha}\delta\alpha + \rho\operatorname{div}(\boldsymbol{\delta\xi}) = 0\ ; \qquad \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\partial\rho}{\partial\alpha} + \left[\frac{\boldsymbol{\delta\xi}}{\delta\alpha}\cdot\nabla\right]\rho \tag{79}$$

$$\delta\rho + \operatorname{div}(\rho\,\boldsymbol{\delta\xi}) = 0 \tag{80}$$

On remarquera la différence entre la définition de $\boldsymbol{\delta\xi} = (\mathbf{d}\boldsymbol{\xi}/\mathrm{d}t)\delta\alpha$ et celle de $\delta\rho = (\partial\rho/\partial\alpha)\delta\alpha$; on remarquera que c'est bien cette définition de $\boldsymbol{\delta\xi}$ qui convient à la formule (66).

Cette dernière équation va nous permettre de transformer le premier terme de (64) ; nous trouvons en effet :

$$\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau\,\varphi\,\delta\rho = -\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau\,\varphi\operatorname{div}(\rho\,\boldsymbol{\delta\xi}) \tag{81}$$

ou, en intégrant par parties :

$$\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau\,\varphi\,\delta\rho = \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau\,\rho\,\boldsymbol{\delta\xi}\cdot\operatorname{grad}\varphi \tag{82}$$

Proposons-nous maintenant de déterminer :

$$\delta(\rho\boldsymbol{v}) = \frac{\partial(\rho\boldsymbol{v})}{\partial\alpha}\delta\alpha \tag{83}$$

Observons que $\rho\Delta$ ne peut dépendre que de x_o, y_o, z_o ; en effet, si l'on considère un élément d'électron dont la position initiale est un parallélépipède rectangle dont les arêtes sont $\mathrm{d}x_\mathrm{o}$, $\mathrm{d}y_\mathrm{o}$, $\mathrm{d}z_\mathrm{o}$, la charge de cet élément est :

$$\rho\Delta\,\mathrm{d}x_\mathrm{o}\,\mathrm{d}y_\mathrm{o}\,\mathrm{d}z_\mathrm{o} \tag{84}$$

et, cette charge devant demeurer constante, on a :

$$\frac{\mathrm{d}(\rho\Delta)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\rho\Delta)}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \tag{85}$$

On en déduit :

$$\frac{\mathrm{d}^2(\rho\,\Delta\boldsymbol{\xi})}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\rho\,\Delta\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho\,\Delta\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}\alpha}\right) \tag{86}$$

Or on sait que pour une fonction U quelconque on a, par l'équation de continuité,

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\mathrm{d}(U\Delta)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div}(U\boldsymbol{v}) \tag{87}$$

et de même :

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\mathrm{d}(U\Delta)}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \operatorname{div}\left[U\left(\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}\alpha}\right)\right] \tag{88}$$

On a donc (*pour* $i = x$, y, z) :

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[\rho\Delta\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\rho\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}t}\right] + \operatorname{div}\left(\rho\cdot\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}\alpha}\cdot\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}t}\right) \tag{89}$$

et (*par interversion de* t *et* α) :

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\rho\Delta\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}\alpha}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}\alpha}\right] + \operatorname{div}\left(\rho\cdot\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}\alpha}\right) \tag{90}$$

Les seconds membres de (89) et (90) doivent être égaux et, si l'on se souvient que :

$$\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}\ ; \qquad \delta\alpha\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}\alpha} = \boldsymbol{\delta\xi}\ ; \qquad \delta\alpha\frac{\partial(\rho\boldsymbol{v})}{\partial\alpha} = \delta(\rho\boldsymbol{v}) \tag{91}$$

il vient :

$$\delta(\rho v_i) + \operatorname{div}(\rho v_i\,\boldsymbol{\delta\xi}) = \frac{\partial(\rho\,\boldsymbol{\delta\xi})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}\,\delta\xi_i), \quad i = (x, y, z) \tag{92}$$

Transformons maintenant le second terme de (64) ; il vient :

$$\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau\,\boldsymbol{A}\cdot\delta(\rho\boldsymbol{v}) = \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau\left\{\left[\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial(\rho\,\boldsymbol{\delta\xi})}{\partial t}\right] + \sum_i\left[A_i\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}\,\delta\xi_i - \rho v_i\,\boldsymbol{\delta\xi})\right]\right\} \tag{93}$$

Le second membre devient, par l'intégration par parties :

$$\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau\left\{\left[-\rho\,\boldsymbol{\delta\xi}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right] + \sum_i\left[\rho(\delta\xi_i\,\boldsymbol{v} - v_i\,\boldsymbol{\delta\xi})\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial i}\right]\right\} \tag{94}$$

Par ailleurs, souvenons-nous que $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$, donc l'intégrale de (94) et (93) peut s'écrire :

$$\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau\left\{\left[-\rho\,\boldsymbol{\delta\xi}\cdot\frac{\partial A}{\partial t}\right] + \rho\,\boldsymbol{\delta\xi}\cdot[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}]\right\} \tag{95}$$

de sorte que finalement (*compte tenu de (64), (82) et (93), puis (63)*) :

$$J = \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau\,\rho\,\boldsymbol{\delta\xi}\cdot\left[\nabla\varphi + \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} + \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v}\right] = \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau\,\rho\,\boldsymbol{\delta\xi}\cdot[-\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v}] \tag{96}$$

En égalant le coefficient de $\boldsymbol{\delta\xi}$ dans les deux membres de (66), il vient :

$$\boldsymbol{f} = \rho(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{97}$$

ce qui est l'équation (7) de la section 1.

Remarquons que cette expression de la force de Lorentz est plus générale que l'expression classique qui ne tient compte que de la charge totale e de la particule chargée :

$$\boldsymbol{F}_{\mathbf{e}} = e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{98}$$

Dans cette section, Poincaré prend en compte la densité de charge ρ, et c'est pourquoi il obtient, à partir du principe de moindre action, l'expression générale (97) au prix d'une analyse approfondie.

3. La transformation de Lorentz et le principe de moindre action

Voyons si le principe de moindre action nous donne la raison du succès de la transformation de Lorentz. Il faut d'abord voir ce que cette transformation fait de l'intégrale (57) :

$$J = \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau\,\left[\frac{\varepsilon \boldsymbol{E}^2}{2} - \frac{\boldsymbol{B}^2}{2\mu}\right] \tag{99}$$

Nous trouvons d'abord :

$$\mathrm{d}t'\mathrm{d}\tau' = l^4 \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau \tag{100}$$

car x', y', z', t' sont liés à x, y, z, t par des relations linéaires dont le déterminant est égal à l^4 ; il vient ensuite, grâce aux relations (32) :

$$l^4 \boldsymbol{E'}^2 = E_x^2 + \gamma^2(E_y^2 + E_z^2) + \gamma^2\beta^2(B_y^2 + B_z^2) + 2\gamma^2\beta(E_z B_y - E_y B_z) \tag{101}$$

$$l^4 \boldsymbol{B'}^2 = B_x^2 + \gamma^2(B_y^2 + B_z^2) + \gamma^2\beta^2(E_y^2 + E_z^2) + 2\gamma^2\beta(E_z B_y - E_y B_z) \tag{102}$$

d'où :

$$l^4 \left[\varepsilon \boldsymbol{E'}^2 - \frac{\boldsymbol{B'^2}}{\mu}\right] = \varepsilon \boldsymbol{E}^2 - \frac{\boldsymbol{B^2}}{\mu} \tag{103}$$

de sorte que si l'on pose :

$$J' = \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau \left[\frac{\varepsilon \boldsymbol{E'}^2}{2} - \frac{\boldsymbol{B'}^2}{2\mu}\right] \tag{104}$$

il vient :

$$J' = J \tag{105}$$

Il faut toutefois, pour que cette égalité soit justifiée, que les limites d'intégration soient les mêmes ; jusqu'ici, nous avons admis que t variait depuis t_o jusqu'à t_1, et x, y, z depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. À ce compte, les limites d'intégration seraient altérées par la transformation de Lorentz ; mais rien ne nous empêche de supposer $t_o = -\infty$ et $t_1 = +\infty$; avec ces conditions, les limites sont les mêmes pour J et pour J'.

Nous avons alors à comparer les deux équations suivantes analogues à l'équation (66) :

$$\delta J = -\int \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\delta\xi} \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}t \tag{106}$$

$$\delta J' = -\int \boldsymbol{f'} \cdot \boldsymbol{\delta\xi'} \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}t \tag{107}$$

Pour cela, il faut d'abord comparer $\boldsymbol{\delta\xi}$ et $\boldsymbol{\delta\xi'}$.

Considérons un électron dont les coordonnées initiales sont $(x_o, y_o, z_o) = \boldsymbol{r_o}$; ses coordonnées à l'instant t seront :

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_o} + \boldsymbol{\xi} \tag{108}$$

Si l'on considère l'électron correspondant après la transformation de Lorentz, il aura pour coordonnées :

$$x' = \gamma l(x - \beta t) \qquad y' = ly \; ; \qquad z' = lz \tag{109}$$

où :

$$\boldsymbol{r'} = \boldsymbol{r'_o} + \boldsymbol{\xi'} \tag{110}$$

mais il n'atteindra ces coordonnées qu'à l'instant :

$$t' = \gamma l(t - \beta x) \tag{111}$$

Si nous faisons subir à nos variables des variations $\boldsymbol{\delta\xi}$ et que nous donnons en même temps à t un accroissement δt, les coordonnées x, y, z, subiront un accroissement total :

$$\boldsymbol{\delta r} = \boldsymbol{\delta\xi} + \boldsymbol{v}\,\delta t \tag{112}$$

Nous aurons de même :

$$\boldsymbol{\delta r'} = \boldsymbol{\delta\xi'} + \boldsymbol{v'}\delta t \tag{113}$$

et, en vertu de la transformation de Lorentz :

$$\delta x' = \gamma l(\delta x - \beta\,\delta t) \; ; \quad \delta y' = l\,\delta y \; ; \quad \delta z' = l\,\delta z \; ; \quad \delta t' = \gamma l(\delta t - \beta\,\delta x) \tag{114}$$

d'où, en supposant $\delta t = 0$, les relations :

$$\boldsymbol{\delta r'} = \boldsymbol{\delta\xi'} + \boldsymbol{v'}\delta t' = l(\gamma\,\delta\xi_x, \,\delta\xi_y, \,\delta\xi_z) \; ; \qquad \delta t' = -\gamma l\beta\,\delta\xi_x \tag{115}$$

Les calculs ici présentés montrent sans ambiguïté la relativité des longueurs et des intervalles de temps mesurés dans différents référentiels. Ainsi, la première des relations (115) indique qu'un intervalle de distance mesuré le long de l'axe des x et déterminé par la différence des abscisses ($\delta\xi_x$) à un moment t donné ($\delta t = 0$) dans le référentiel $Oxyz\,t$, subit une contraction de facteur $\gamma l = l(1-\beta^2)^{-0,5}$ par rapport à sa mesure $\delta\xi'_x$ dans le référentiel $O'x'y'z't'$ en mouvement avec la vitesse β par rapport référentiel $Oxyz\,t$. De même, la simultanéité perd son sens classique puisque $\delta t = 0$ et $\delta t' = -\gamma l\beta\,\delta\xi_x$ non nul.

Cette relativité de la simultanéité de deux événements physiques dans la transformation de Lorentz, et aussi la relativité de l'égalité de deux intervalles de temps, ont été anticipées de manière remarquable par Poincaré dans son article[19] « La mesure du temps » publié en 1898. Dans cet article, Poincaré se livre à une analyse critique sévère du concept de simultanéité et développe l'idée d'une relation entre les notions physique de temps et celle des chaines causes-conséquences.

Relevons-y en particulier ces deux assertions :

« Il est difficile de séparer le problème qualitatif de la simultanéité de la tâche quantitative de la mesure du temps »

et : *« Ni la simultanéité, ni l'égalité de deux intervalles de temps ne peuvent être définies directement par intuition. »*

Remarquons que :

$$v'_x = \frac{v_x - \beta}{1-\beta v_x}\ ; \qquad v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1-\beta v_x)}\ ; \qquad v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1-\beta v_x)} \tag{116}$$

il viendra, en remplaçant $\delta t'$ par sa valeur :

$$\left.\begin{aligned} \gamma l(1-\beta v_x)\,\delta\xi_x &= \delta\xi'_x(1-\beta v_x) - (v_x-\beta)\gamma l\beta\,\delta\xi_x \\ l(1-\beta v_x)\,\delta\xi_y &= \delta\xi'_y(1-\beta v_x) - v_y l\beta\,\delta\xi_x \\ l(1-\beta v_x)\,\delta\xi_z &= \delta\xi'_z(1-\beta v_x) - v_z l\beta\,\delta\xi_x \end{aligned}\right\} \tag{117}$$

Si nous nous rappelons la définition de γ, nous tirerons de là :

$$\left.\begin{aligned} l\,\delta\xi_x &= \gamma(1-\beta v_x)\,\delta\xi'_x \\ l\,\delta\xi_y &= \delta\xi'_y - \gamma\beta v_y\,\delta\xi'_x \\ l\,\delta\xi_z &= \delta\xi'_z - \gamma\beta v_z\,\delta\xi'_x \end{aligned}\right\} \tag{118}$$

d'où :

$$l\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\delta\xi} = \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\delta\xi'} + \delta\xi'_x\big[(\gamma-1) - \gamma\beta\ \delta\xi'_x\,\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\big] \tag{119}$$

Or, en vertu des équations (105)-(107), on doit avoir :

$$\int \boldsymbol{f'}\cdot\boldsymbol{\delta\xi'}\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}\tau' = l^{-4}\int \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\delta\xi}\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}\tau' = \int \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\delta\xi}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau \tag{120}$$

[19] Poincaré H., « La mesure du temps, » *Revue de Métaphysique et de Morale*, **6**, 1898, p. 371-384.

En remplaçant $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\delta\xi}$ par sa valeur (119) et en identifiant, il vient :

$$l^5 f'_x = \gamma(f_x - \beta\, \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}) \; ; \qquad l^5 f'_y = f \; ; \qquad l^5 f'_z = f_z \tag{121}$$

Ce sont les équations (36) de la section 1. Le principe de moindre action nous conduit au même résultat que l'analyse de la section 1.

> Il convient de rappeler ici ce commentaire écrit par Lorentz en 1914 et publié en 1921 : *« Je ne puis m'étendre ici sur tous les beaux résultats obtenus par Poincaré. Insistons cependant sur quelques points. D'abord, il ne s'est pas contenté de faire voir que les transformations de relativité laissent intacte la forme des équations électromagnétiques. Il explique le succès des substitutions en remarquant que ces équations peuvent être mises sous la forme du principe de moindre action et que l'équation fondamentale qui exprime ce principe, ainsi que les opérations par lesquelles on en déduit les équations du champ, sont les mêmes dans les systèmes x, y, z, t et x', y', z', t'. »*
>
> H.A. Lorentz, « Deux mémoires de Henri Poincaré
> sur la Physique mathématique. »[20]

Si nous nous reportons aux formules (101)-(103), nous voyons que $\varepsilon \boldsymbol{E}^2 - (\boldsymbol{B}^2/\mu)$ n'est pas altérée par la transformation de Lorentz, sauf un facteur constant ; il n'en est pas de même de l'expression $\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + (\boldsymbol{B}^2/\mu)$ qui figure dans l'énergie. Si nous nous bornons au cas où β est assez petit pour qu'on puisse en négliger le carré de sorte que $\gamma = 1$, et si nous supposons aussi $l = 1$, nous trouvons (*en respectant les dimensions et en rappelant que β et $1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ sont des vitesses*) :

$$\boldsymbol{E'}^2 = \boldsymbol{E}^2 - 2\beta(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})_x \tag{122}$$

$$\boldsymbol{B'}^2 = \boldsymbol{B}^2 - 2\mu\varepsilon\beta(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})_x \tag{123}$$

d'où :

$$\varepsilon \boldsymbol{E'}^2 + \frac{\boldsymbol{B'}^2}{\mu} = \varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \frac{\boldsymbol{B}^2}{\mu} - 4\varepsilon\beta(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})_x \tag{124}$$

4. Le groupe de Lorentz

> *« Le concept de groupe mathématique est à la base de la théorie de la relativité restreinte. »* Wolfgang Pauli[21]

Il importe de remarquer que les transformations de Lorentz forment un groupe.

[20] Lorentz H. A., « Deux mémoires de Henri Poincaré dans la Physique mathématique, » *Acta Matematica*, tome 38, 1921, p. 298, et aussi *Œuvres de Henri Poincaré*, tome 11, p. 252, Gauthier-Villars, Paris, 1956.

[21] Pauli W., *Universitas*, tome 13, 1958, p. 583-598.

Si l'on pose en effet :

$$x' = \gamma l(x - \beta t) \ ; \qquad y' = ly \ ; \qquad z' = lz \ ; \qquad t' = \gamma l(t - \beta x) \tag{125}$$

et d'autre part :

$$x'' = \gamma' l'(x' - \beta' t') \ ; \qquad y'' = l'y' \ ; \qquad z'' = l'z' \ ; \qquad t'' = \gamma' l'(t' - \beta' x') \tag{126}$$

avec :

$$\gamma^{-2} = 1 - \beta^2 \ ; \qquad (\gamma')^{-2} = 1 - (\beta')^2 \tag{127}$$

il viendra :

$$x'' = \gamma'' l''(x - \beta'' t) \ ; \qquad y'' = l'' y \ ; \qquad z'' = l'' z \ ; \qquad t'' = \gamma'' l''(t - \beta'' x) \tag{128}$$

avec :

$$\beta'' = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'} \ ; \qquad l'' = ll' \ ; \qquad \gamma'' = \gamma\gamma'(1 + \beta\beta') = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta''^2}} \tag{129}$$

Si nous donnons à l la valeur 1 et si nous prenons β infiniment petit, avec :

$$\boldsymbol{r'} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\delta r} \ ; \qquad t' = t + \delta t \tag{130}$$

il viendra :

$$\delta x = -\beta t \ ; \qquad \delta y = 0 \ ; \qquad \delta z = 0 \ ; \qquad \delta t = -\beta x \tag{131}$$

C'est là la transformation infinitésimale génératrice du groupe, que j'appellerai *la transformation* T_1 et qui, d'après la notation de Lie, peut s'écrire :

$$t\frac{\partial \varphi}{\partial x} + x\frac{\partial \varphi}{\partial t} = T_1 \varphi \tag{132}$$

Si nous supposions $\beta = 0$ et $l = 1 + \delta l$, nous trouverions au contraire :

$$\delta x = x\,\delta l \ ; \qquad \delta y = y\,\delta l \ ; \qquad \delta z = z\,\delta l \ ; \qquad \delta t = t\,\delta l \ ; \tag{133}$$

et nous aurions une autre transformation infinitésimale T_{o} du groupe (à supposer que l et β soient regardées comme des variables indépendantes), et l'on aurait avec la notation de Lie :

$$T_{\mathrm{o}}\varphi = x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi}{\partial z} + t\frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{134}$$

Mais l'on pourrait faire jouer à l'axe des y ou à celui des z le rôle particulier que nous avons fait jouer à celui des x ; on aurait ainsi deux autres transformations infinitésimales :

$$T_2\varphi = t\frac{\partial \varphi}{\partial y} + y\frac{\partial \varphi}{\partial t} \ ; \qquad T_3\varphi = t\frac{\partial \varphi}{\partial z} + z\frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{135}$$

qui n'altéreraient pas non plus les équations de Lorentz.

On peut former les combinaisons imaginées par Lie, telles que :

$$[T_1,\, T_2]\varphi = x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{136}$$

mais il est aisé de voir que cette transformation équivaut à un changement d'axes de coordonnées, les axes tournant d'un très petit angle autour de l'axe des z. Nous ne devons donc pas nous étonner si un pareil changement n'altère pas la forme des équations de Lorentz, évidemment indépendantes du choix des axes. Nous sommes donc amenés à envisager un groupe continu que nous appellerons le *groupe de Lorentz* et qui admettra comme transformations infinitésimales :

1° La transformation T_o qui sera permutable à toutes les autres ;

2° Les trois transformations T_1, T_2, T_3 ;

3° Les trois rotations $[T_1, T_2]$, $[T_2, T_3]$, $[T_3, T_1]$.

Une transformation quelconque de ce groupe pourra toujours se décomposer en une transformation de la forme :

$$x' = lx\ ; \qquad y' = ly\ ; \qquad z' = lz\ ; \qquad t' = lt \tag{137}$$

et une transformation linéaire qui n'altère pas la forme quadratique :

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 \tag{138}$$

Nous pouvons encore engendrer notre groupe d'une autre manière. Toute transformation du groupe pourra être regardée comme une transformation de la forme :

$$x' = \gamma l(x - \beta t)\ ; \qquad y' = ly\ ; \qquad z' = lz\ ; \qquad t' = \gamma l(t - \beta x) \tag{139}$$

précédée et suivie d'une rotation convenable.

Mais pour notre objet, nous ne devons considérer qu'une partie des transformations de ce groupe ; nous devons supposer que l est une fonction de β ; il s'agit de choisir cette fonction de façon que cette partie du groupe, que j'appellerai P, forme encore un groupe.

Faisons tourner le système de 180° autour de l'axe des y, nous devrons trouver une transformation qui devra encore appartenir à P. Or cela revient à changer le signe de x, x', z et z' ; on trouve donc ainsi (*pour les relations* (139)) :

$$x' = \gamma l(x + \beta t)\ ; \qquad y' = ly\ ; \qquad z' = lz\ ; \qquad t' = \gamma l(t + \beta t) \tag{140}$$

Donc l ne change pas quand on change β en $-\beta$.

D'autre part, si P est un groupe, la substitution inverse de (139), qui s'écrit :

$$x' = \frac{\gamma}{l}(x + \beta t)\ ; \qquad y' = \frac{y}{l}\ ; \qquad z' = \frac{z}{l}\ ; \qquad t' = \frac{\gamma}{l}(t + \beta x) \tag{141}$$

devra également appartenir à P ; elle devra donc être identique à (140), c'est-à-dire que :

$$l = \frac{1}{l} \tag{142}$$

On devra donc avoir $l = 1$.

Il convient de noter que **le coefficient l est identique à 1**, ce qui non seulement nous donne le groupe des transformations de l'espace-temps, groupe que Poincaré a appelé groupe de Lorentz, mais simplifie aussi considérablement toute l'étude.

Ainsi l'équation (103) montre que la différence $\varepsilon \boldsymbol{E}^2 - (\boldsymbol{B}^2/\mu)$ est un invariant du champ électromagnétique lors des transformations de Lorentz. À ce premier invariant électromagnétique, Poincaré en ajoutera un autre dans la section qui suit : le produit scalaire $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}$, ce que l'on pourrait déjà déduire de (32).

Ajoutons, avec (137) et (138), que la forme quadratique $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ est donc un invariant de toutes les transformations du groupe de Lorentz.

Remarquons enfin que si, pour plus de généralité, on considère le groupe contenant celui de Lorentz et les translations dans l'espace et/ou le temps, on obtient ce que l'on appelle aujourd'hui le *groupe de Poincaré*, où l'origine n'est plus nécessairement conservée et où l'invariant quadratique est la différence $L^2 - T^2$, la lettre L désignant la distance ou la longueur (intervalle d'espace) et la lettre T l'intervalle de temps entre deux points de l'espace-temps.

5. Ondes de Langevin

M. Langevin a mis sous une forme particulièrement élégante les formules qui définissent le champ électromagnétique produit par le mouvement d'un électron unique.

Reprenons les équations (5) :

$$\varepsilon \,\Box\, \varphi = -\rho \ ; \qquad \Box \boldsymbol{A} = -\mu \rho \boldsymbol{v} \tag{143}$$

On sait que l'on peut intégrer par les potentiels retardés et que l'on a :

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho_1}{R} \mathrm{d}\tau_1 \ ; \qquad \boldsymbol{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\rho_1 \boldsymbol{v}_1}{R} \mathrm{d}\tau_1 \tag{144}$$

Dans ces formules, on a :

$$\mathrm{d}\tau_1 = \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}y_1 \, \mathrm{d}z_1 \ ; \ R = \left[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2\right]^{1/2} = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_1}| \tag{145}$$

tandis que ρ_1 et $\boldsymbol{v}_1$ sont les valeurs de ρ et de $\boldsymbol{v}$ au point x_1, y_1, z_1 et à l'instant :

$$t_1 = t - R \tag{146}$$

Soient $\boldsymbol{r_o} = (x_o, y_o, z_o)$ les coordonnées d'une molécule d'électron à l'instant t ; $\boldsymbol{r_1} = (x_1, y_1, z_1) = \boldsymbol{r_o} + \boldsymbol{\xi}$ ses coordonnées à l'instant t_1 (*en langage moderne, on ne dirait pas « molécule de l'électron » mais « point de la particule chargée »*).

$\boldsymbol{\xi} = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ est une fonction de $\boldsymbol{r_o}, t_1$, de sorte que nous pourrons écrire :

$$\mathrm{d}x_1 = \mathrm{d}x_o + \frac{\partial \xi_x}{\partial \boldsymbol{r_o}} \mathbf{d}\boldsymbol{r_o} + v_{1x} \mathrm{d}t_1 \tag{147}$$

(*et de même pour* $\mathrm{d}y_1$ *et* $\mathrm{d}z_1$) et, si l'on suppose t constant ainsi que x, y et z, les équations (145) et (146) donnent :

$$\mathrm{d}t_1 = \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_1}) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{r_1}}{R} \tag{148}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\mathbf{d}\boldsymbol{r_1} + \left[(\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r}) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{r_1}\right] \frac{\boldsymbol{v_1}}{R} = \mathbf{d}\boldsymbol{r_o} + \left[\mathbf{d}\boldsymbol{r_o} \cdot \nabla_{r_o}(\boldsymbol{\xi})\right] \tag{149}$$

donc, en posant $\mathrm{d}\tau_o = \mathrm{d}x_o \, \mathrm{d}y_o \, \mathrm{d}z_o$, nous aurons (*en considérant les déterminants correspondant à* (149)) :

$$\mathrm{d}\tau_1 \cdot \det \left[I + \boldsymbol{v_1} \times \frac{\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r}}{R} \right] = \mathrm{d}\tau_o \cdot \det \left[\frac{\partial(\boldsymbol{r_o} + \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{r_o}} \right] \tag{150}$$

Étudions les déterminants qui figurent dans les deux membres de (150), et d'abord dans le premier membre ; si on cherche à le développer, on voit que les termes du deuxième et du troisième degré par rapport à $\boldsymbol{v_1}$ disparaissent et que le déterminant est égal à :

$$\det \left[I + \boldsymbol{v_1} \times \frac{\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r}}{R} \right] = 1 + \boldsymbol{v_1} \cdot \frac{\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r}}{R} = 1 + \omega \tag{151}$$

ω désignant la composante radiale de la vitesse $\boldsymbol{v_1}$, c'est-à-dire sa composante dirigée suivant le rayon vecteur $\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r}$.

Pour obtenir le second déterminant, j'envisage les coordonnées des différentes molécules de l'électron (i.e. *« des différents points de la particule chargée »*) à un instant t_2 qui est le même pour toutes les molécules, mais de telle façon que, pour la molécule que j'envisage, on ait $t_1 = t_2$. Les coordonnées d'une molécule seront alors :

$$\boldsymbol{r_2} = \boldsymbol{r_o} + \boldsymbol{\xi_2} \tag{152}$$

$\boldsymbol{\xi_2}$ étant ce que devient $\boldsymbol{\xi}$ quand on y remplace t_2 par t_1 ; comme t_2 est le même pour toutes les molécules voisines, on aura :

$$\mathrm{d}x_2 = \mathrm{d}x_o + \frac{\partial \xi_{2x}}{\partial \boldsymbol{r_o}} \mathbf{d}\boldsymbol{r_o} \tag{153}$$

et par conséquent :

$$\mathrm{d}\tau_2 = \mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}z_2 = \mathrm{d}\tau_\mathrm{o}\cdot\det\left[\frac{\partial(\boldsymbol{r_\mathrm{o}}+\boldsymbol{\xi_2})}{\partial\boldsymbol{r_\mathrm{o}}}\right] \tag{154}$$

Mais l'élément de charge électrique est :

$$\mathrm{d}e_1 = \rho_2\,\mathrm{d}\tau_2 = \rho_1\,\mathrm{d}\tau_2 \tag{155}$$

de sorte qu'avec (151) et (154), l'équation (150) deviendra :

$$\rho_1\,\mathrm{d}\tau_1(1+\omega) = \mathrm{d}e_1 \tag{156}$$

et, avec (145)-(146), les équations (144) deviennent :

$$\varphi(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\frac{\mathrm{d}e_1}{R(1+\omega)}\ ; \qquad \boldsymbol{A}(x,y,z,t) = \frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{v_1}}{R(1+\omega)}\mathrm{d}e_1 \tag{157}$$

Si nous avons affaire à un électron unique, nos intégrales se réduisent à un seul élément, pourvu que l'on ne considère que des points (x,y,z,t) suffisamment éloignés pour que R et ω aient sensiblement la même valeur en tout point de l'électron. Les potentiels φ et $\boldsymbol{A}$ dépendront de la position de cet électron, et aussi de sa vitesse, car non seulement $\boldsymbol{v_1}$ figure au numérateur dans l'expression de $\boldsymbol{A}$, mais aussi la composante radiale ω figure au dénominateur. Il s'agit bien entendu de la position et de la vitesse de cet électron à l'instant t_1.

Les dérivées partielles de φ et $\boldsymbol{A}$ par rapport à x, y, z, t (et par conséquent le champ électrique $\boldsymbol{E}$ et l'induction magnétique $\boldsymbol{B}$) dépendront en outre de son accélération. De plus, elles en dépendront *linéairement* puisque dans ces dérivées, cette accélération s'introduit par suite d'une accélération unique.

Langevin a été ainsi conduit à distinguer dans le champ électrique et l'induction magnétique les termes qui ne dépendent pas de l'accélération (c'est ce qu'il appelle *l'onde de vitesse*) de ceux qui en dépendent (c'est ce qu'il appelle *l'onde d'accélération*).

Le calcul de ces deux ondes est facilité par la transformation de Lorentz. Nous pouvons en effet appliquer cette transformation au système, de façon que la vitesse de l'électron unique envisagé devienne nulle. Nous prendrons pour l'axe des x la direction de cette vitesse avant la transformation, de sorte que, à l'instant t_1 :

$$v_{1y} = v_{1z} = 0 \tag{158}$$

et nous prendrons $\beta = v_{1z}$; de cette façon, dans le second système d'axe, la vitesse $\boldsymbol{v_1'}$ de l'électron est bien nulle.

Nous pouvons donc ramener le calcul des deux ondes au cas où la vitesse de l'électron est nulle. Commençons par l'onde de vitesse ; nous pouvons remarquer d'abord que cette onde est la même que si le mouvement de l'électron était uniforme.

Puisque la vitesse de l'électron est nulle, dans le second système, on a :

$$\omega' = 0 \; ; \qquad \boldsymbol{A'} = 0 \; ; \qquad \varphi' = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon R'} \tag{159}$$

e_1 étant la charge de l'électron et R' étant $\left|\boldsymbol{r'} - \boldsymbol{r'_1}\right|$ la distance du point $\boldsymbol{r'} = (x', y', z')$ au point $\boldsymbol{r'_1} = (x'_1, y'_1, z'_1)$ dans le second système ; et par conséquent :

$$\boldsymbol{B'} = 0 \; ; \qquad \boldsymbol{E'} = \frac{e_1(\boldsymbol{r'} - \boldsymbol{r'_1})}{4\pi\varepsilon R'^{\,3}} \tag{160}$$

Faisons maintenant la transformation inverse de celle de Lorentz pour trouver le champ correspondant à la vitesse β, 0, 0. Nous trouvons, en nous reportant aux équations (32) et (8), avec $l = 1$:

$$\boldsymbol{B} = \gamma\beta(0, -E'_z, +E'_y) = \frac{\gamma\beta e_1\big[0, (z_1 - z), (y - y_1)\big]}{4\pi\varepsilon R'^{\,3}} \tag{161}$$

$$\boldsymbol{E} = (E'_x, \gamma E'_y, \gamma E'_z) = \gamma e_1 \frac{\big[(x - \beta t - x_1 + \beta t_1), (y - y_1), (z - z_1)\big]}{4\pi\varepsilon R'^{\,3}} \tag{162}$$

On voit que l'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ est perpendiculaire à l'axe des x (direction de la vitesse) et au champ électrique $\boldsymbol{E}$, et que ce champ électrique est dirigé (au signe près) vers le point :

$$\boldsymbol{r_1} + \boldsymbol{v_1}(t - t_1) = (x_1 + \beta t - \beta t_1,\, y_1,\, z_1) \tag{163}$$

c'est-à-dire vers le point qu'occuperait l'électron à l'instant t s'il gardait une vitesse rectiligne et uniforme.

Passons à l'onde d'accélération ; nous pouvons, grâce à la transformation de Lorentz, ramener sa détermination au cas où la vitesse est nulle. C'est le cas qui est réalisé si l'on imagine un électron qui exécute des oscillations d'amplitude très petites, mais très rapides, de façon que les déplacements et les vitesses soient infiniment petits, mais que les accélérations soient finies. On retombe ainsi sur le champ qui a été étudié dans le célèbre Mémoire de Hertz intitulé *Die Kräfte elektrischer Schwingungen nach der Maxwell'schen Theorie*, et cela pour un point très éloigné. Dans ces conditions :

1° Le champ électrique $\boldsymbol{E}$ et l'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ ont des modules de rapport constant ($E/B = c =$ vitesse de la lumière).

2° $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ sont perpendiculaires entre eux.

3° $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ sont perpendiculaires à la normale à la sphère d'onde, c'est-à-dire à la sphère dont le centre est le point x_1, y_1, z_1 où se trouve l'électron.

Je dis que ces trois propriétés subsisteront encore quand la vitesse ne sera pas nulle, et pour cela, il me suffit de montrer qu'elles ne sont pas altérées par la transformation de Lorentz.

La première propriété se vérifie grâce aux équations (103) et (142) : puisque $l = 1$, la différence $[\varepsilon \boldsymbol{E}^2 - (\boldsymbol{B}^2/\mu)]$ est un invariant électromagnétique de la transformation de Lorentz ; or $\mu\varepsilon c^2 = 1$, donc, dans le cas qui nous occupe, cette différence est et reste nulle et le rapport E'/B' est égal à E/B et à la vitesse de la lumière c.

Les deux autres propriétés peuvent s'exprimer en disant que le trièdre $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_1})$ est tri-rectangle ou encore que les trois produits scalaires $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_1})$ et $\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_1})$ sont nuls. En prenant $c = 1$, on peut même écrire, car le trièdre est dans le bon sens :

$$R\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_1}) \; ; \quad R\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} \times (\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r}), \text{ avec : } R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_1}| = t - t_1 \quad (164)$$

Compte tenu de $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$ et de $l = 1$, les équations de transformation (32) montrent que :

$$\boldsymbol{E'} \cdot \boldsymbol{B'} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} \tag{165}$$

Le produit scalaire $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}$ est donc un deuxième invariant électromagnétique de la transformation de Lorentz et, dans le cas étudié, étant nul dans le premier système, il l'est aussi dans le second.

Je dis maintenant que :

$$\boldsymbol{E'} \cdot (\boldsymbol{r'} - \boldsymbol{r'_1}) = 0 \; ; \qquad \boldsymbol{B'} \cdot (\boldsymbol{r'} - \boldsymbol{r'_1}) = 0 \tag{166}$$

En effet, compte-tenu de $l = 1$ et en vertu des équations de transformation (8) et (32), les premiers membres des équations (166) peuvent s'écrire :

$$\boldsymbol{E'} \cdot (\boldsymbol{r'} - \boldsymbol{r'_1}) = \gamma \boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_1}) + \gamma\beta\big[E_x(t_1 - t) + B_y(z - z_1) + B_z(y_1 - y)\big] \tag{167}$$

$$\boldsymbol{B'} \cdot (\boldsymbol{r'} - \boldsymbol{r'_1}) = \gamma \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_1}) + \gamma\beta\big[B_x(t_1 - t) + E_y(z_1 - z) + E_z(y - y_1)\big] \tag{168}$$

Les relations (164) entraînent que les quantités entre crochets de (167) et (168) sont nulles, et comme les deux produits scalaires $\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_1})$ et $\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_1})$ le sont aussi, les relations (166) sont effectivement vérifiées (*et l'on peut généraliser les relations (164) car le sens du trièdre n'est pas modifié, ce qui est aisé à comprendre par continuité*).

On peut d'ailleurs arriver au même résultat par de simples considérations d'homogénéité.

En effet $\boldsymbol{A}$ et φ sont des fonctions de $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_1}$ et $\boldsymbol{v_1} = \mathbf{d}\boldsymbol{r_1}/\mathrm{d}t$, homogènes de degré (-1) par rapport à x, y, z, t, x_1, y_1, z_1, t_1 et à leurs différentielles.

Donc les dérivées de $\boldsymbol{A}$ et φ par rapport à x, y, z, t (et par conséquent les deux champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$) seront homogènes de degré (-2) par rapport aux mêmes quantités, si nous nous rappelons par ailleurs que la relation :

$$t - t_1 = R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_1}| \tag{169}$$

est homogène par rapport à ces quantités.

Or ces dérivées ou ces champs dépendent de $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_1}$, de la vitesse $\boldsymbol{v_1}$ et de l'accélération $\mathbf{d}\boldsymbol{v_1}/\mathrm{d}t$; ils se composent d'un terme indépendant des accélérations (onde de vitesse) et d'un terme linéaire par rapport aux accélérations (onde d'accélération).

Or $\boldsymbol{v_1}$ est homogène de degré zéro et $\mathbf{d}\boldsymbol{v_1}/\mathrm{d}t$ est homogène de degré (-1) ; d'où il suit que l'onde de vitesse est homogène de degré (-2) par rapport à $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_1}$ et l'onde d'accélération est homogène de degré (-1). Donc, en un point très éloigné, l'onde d'accélération est prépondérante et peut par conséquent être regardée comme se confondant avec l'onde totale. De plus, la loi d'homogénéité nous montre que l'onde d'accélération est semblable à elle-même en un point éloigné et en un point quelconque. Or, en un point éloigné, la perturbation ne peut se propager que par ondes planes, de sortes que les deux champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ doivent être proportionnels ($E/B = c =$ vitesse de la lumière), perpendiculaires entre eux et perpendiculaires à la direction de propagation.

Je me bornerai à renvoyer pour plus de détails au Mémoire de M. Langevin dans le *Journal de Physique* (année 1905).

6. Contraction des électrons
(Contraction des particules chargées)

Supposons un électron unique animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme. D'après ce que nous venons de voir, on peut, grâce à la transformation de Lorentz, ramener l'étude du champ déterminé par cet électron au cas où l'électron serait immobile ; la transformation de Lorentz remplace donc l'électron réel en mouvement par un électron idéal immobile.

Soit $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ le champ réel ; soit $\boldsymbol{E'}$, $\boldsymbol{B'}$ ce que devient le champ après la transformation de Lorentz, de sorte que le champ idéal $\boldsymbol{E'}$, $\boldsymbol{B'}$ correspond au cas d'un électron immobile ; on a :

$$\boldsymbol{E'} = -\nabla\varphi' \ ; \qquad \boldsymbol{B'} = 0 \tag{170}$$

et pour le champ réel (en vertu des équations (32)) :

$$\left.\begin{array}{l} E_x = l^2 E'_x \ ; \qquad E_y = \gamma l^2 E'_y \ ; \qquad E_z = \gamma l^2 E'_z \ ; \\ \boldsymbol{B} = (\gamma\beta l^2, 0, 0) \times \boldsymbol{E'} = (\beta, 0, 0) \times \boldsymbol{E} \end{array}\right\} \tag{171}$$

Il s'agit maintenant de déterminer l'énergie totale due au mouvement de l'électron, l'action correspondante et la quantité de mouvement électromagnétique, afin de pouvoir calculer les masses électromagnétiques de l'électron. Pour un point éloigné, il suffit de considérer l'électron comme réduit à un point unique ; on est ainsi ramené aux formules (161)-(162) qui, généralement, peuvent convenir. Mais ici, elles ne sauraient suffire parce que l'énergie est principalement localisée dans les parties de l'éther les plus voisines de l'électron.

On peut faire à ce sujet plusieurs hypothèses.

D'après celle d'Abraham, les électrons seraient sphériques et indéformables. Alors, quand on appliquerait la transformation de Lorentz, comme l'électron réel serait sphérique, l'électron idéal deviendrait un ellipsoïde. L'équation de cet ellipsoïde se déduit des équations (8) (*et en particulier de* $x - \beta t = \dfrac{x'}{\gamma l}$) :

– électron réel à un instant t :

$$(x - \beta t)^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{172}$$

– électron idéal (*c'est-à-dire le même électron dans les axes animés de la vitesse* $(\beta, 0, 0)$ *dans lesquels la vitesse de l'électron est nulle*) :

$$\frac{x'^2}{\gamma^2} + y'^2 + z'^2 = l^2 r^2 \tag{173}$$

Si le rayon de l'électron est r, les axes de l'électron idéal seraient donc :

$$\gamma l r \ ; \qquad l r \ ; \qquad l r \tag{174}$$

Dans l'hypothèse de Lorentz, au contraire, les électrons en mouvement seraient déformés de telle façon que ce serait l'électron réel qui deviendrait un ellipsoïde, tandis que l'électron idéal immobile serait toujours une sphère de rayon r ; les axes de l'électron réel seront alors :

$$\frac{r}{\gamma l} \ ; \qquad \frac{r}{l} \ ; \qquad \frac{r}{l} \tag{175}$$

Désignons par

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int \varepsilon E_x^2 \, \mathrm{d}\tau \tag{176}$$

l'*énergie électrique longitudinale* ; par

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2} \int \varepsilon (E_y^2 + E_z^2) \, \mathrm{d}\tau \tag{177}$$

l'*énergie électrique transversale* ; par

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2\mu}\int (B_y^2 + B_z^2)\,\mathrm{d}\tau \tag{178}$$

l'*énergie magnétique transversale.* Il n'y a pas d'énergie magnétique longitudinale puisque $B_x = B'_x = 0$.

Désignons par $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ les quantités correspondantes dans le système idéal. On trouve d'abord :

$$\mathcal{C}' = 0\ ; \qquad \mathcal{C} = \mu\varepsilon\beta^2\mathcal{B} \tag{179}$$

D'autre part, nous pouvons observer que le champ réel dépend seulement de $x-\beta t$, y et z, et écrire :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\tau &= \mathrm{d}(x-\beta t)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \\ \mathrm{d}\tau' &= \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z' = \gamma l^3 \mathrm{d}\tau \end{aligned}\right\} \tag{180}$$

d'où :

$$\mathcal{A}' = \frac{\gamma}{l}\mathcal{A}\ ; \qquad \mathcal{B}' = \frac{1}{\gamma l}\mathcal{B}\ ; \qquad \mathcal{A} = \frac{l}{\gamma}\mathcal{A}'\ ; \qquad \mathcal{B} = \gamma l\mathcal{B}' \tag{181}$$

Dans l'hypothèse de Lorentz, on a $\mathcal{B}' = 2\mathcal{A}'$, et $\mathcal{A}'$, inversement proportionnel au rayon de l'électron, est une constante indépendante de la vitesse de l'électron réel ; on trouve ainsi pour l'énergie totale :

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} = \gamma l \mathcal{A}'(3 + \beta^2) \tag{182}$$

et pour l'action (par unité de temps) :

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} - \mathcal{C} = \frac{3l}{\gamma}\mathcal{A}' \tag{183}$$

Calculons maintenant la quantité de mouvement électromagnétique ; nous trouverons :

$$P = \int \mu\varepsilon(E_y H_z - E_z H_y)\,\mathrm{d}\tau = \int \varepsilon\beta(E_y^2 + E_z^2)\,\mathrm{d}\tau = 2\beta\mathcal{B} = 4\beta\gamma l\mathcal{A}' \tag{184}$$

Mais on doit avoir certaines relations entre l'énergie totale $\mathcal{E} = \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}$, l'action par unité de temps $L = \mathcal{A} + \mathcal{B} - \mathcal{C}$, et la quantité de mouvement P. La première de ces relations est :

$$\mathcal{E} = L - \beta\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\beta} \tag{185}$$

La seconde est :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\beta} = \frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}\beta} \tag{186}$$

(*les dérivées par rapport à β sont obtenues en considérant γ et l comme des fonctions de β*).

Ces deux relations dérivent de :

$$P = -\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\beta}\ ; \qquad \mathcal{E} = L + \beta P \tag{187}$$

La seconde des équations (187) est toujours satisfaite ; mais la première ne l'est que si :

$$l = (1-\beta^2)^{\frac{1}{6}} = \gamma^{-\frac{1}{3}} \tag{188}$$

c'est-à-dire si le volume de l'électron idéal est égal à celui de l'électron réel, ou encore si le volume de l'électron est constant ; c'est l'hypothèse de Langevin.

Cela est en contradiction avec le résultat de la section 4 (*« Le groupe de Lorentz »*) et avec le résultat de Lorentz obtenu par une autre voie. C'est cette contradiction qu'il s'agit d'expliquer.

Avant d'aborder cette explication, j'observe que, quelle que soit l'hypothèse adoptée, nous aurons :

$$L = \mathcal{A} + \mathcal{B} - \mathcal{C} = \frac{l}{\gamma}(\mathcal{A}' + \mathcal{B}') \tag{189}$$

ou, à cause de $\mathcal{C}' = 0$:

$$L = \frac{l}{\gamma}L' \tag{190}$$

Nous pouvons rapprocher ce résultat de l'équation (105) : $J' = J$.

Nous avons en effet :

$$J = \int L\,\mathrm{d}t\ ; \qquad J' = \int L'\,\mathrm{d}t' \tag{191}$$

Nous observons que l'état du système dépend seulement de $x - \beta t$, y et z, c'est-à-dire de x', y', z', et que nous avons :

$$t' = \frac{l}{\gamma}t - \beta x'\ ; \qquad \mathrm{d}t' = \frac{l}{\gamma}\mathrm{d}t \tag{192}$$

ce qui, avec (190) et (191), donne bien $J = J'$.

> Nous retrouvons ici une fois encore le rapport $\mathrm{d}t'/\mathrm{d}t$ de la dilatation des temps à x' fixé tel qu'on peut l'obtenir dès les équations (1).

Plaçons-nous dans une hypothèse quelconque, qui pourra être soit celle de Lorentz, soit celle d'Abraham, soit celle de Langevin, soit une hypothèse intermédiaire.

Soient :

$$r \ ; \qquad \theta r \ ; \qquad \theta r \tag{193}$$

les trois axes de l'électron réel ; ceux de l'électron idéal seront :

$$\gamma l r \ ; \qquad \theta l r \ ; \qquad \theta l r \tag{194}$$

Alors $\mathcal{A}' + \mathcal{B}'$ sera l'énergie électrostatique due à un ellipsoïde ayant pour axes $\gamma l r$; $\theta l r$; $\theta l r$.

Que l'on suppose l'électricité répandue à la surface de l'électron comme à celle d'un conducteur, ou uniformément répandue à l'intérieur de cet électron, cette énergie sera de la forme :

$$\mathcal{A}' + \mathcal{B}' = \frac{1}{\gamma l r} f\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) \tag{195}$$

où f est une fonction connue (** voir ci-dessous l'équation (201)*).

L'hypothèse d'Abraham consiste à supposer :

$$r = \text{constante} \ ; \qquad \theta = 1 \tag{196}$$

Celle de Lorentz :

$$l = 1 \ ; \qquad \gamma r = \text{constante} \ ; \qquad \theta = \gamma \tag{197}$$

Celle de Langevin :

$$l = \gamma^{-\frac{1}{3}} \ ; \qquad \gamma = \theta \ ; \qquad \gamma l r = \text{constante} \tag{198}$$

On trouve ensuite (*en accord avec (189) et (195)*) :

$$L = \frac{1}{\gamma^2 r} f\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) \tag{199}$$

Abraham trouve, à la différence des notations près (*Göttingen Narichten*, 1902, p. 37) :

$$L = \frac{a}{r} \frac{1-\beta^2}{\beta} \operatorname{Log} \frac{1+\beta}{1-\beta} \tag{200}$$

a étant une constante. Or, dans l'hypothèse d'Abraham, on a $\theta = 1$; donc :

$$f\left(\frac{1}{\gamma}\right) = a\gamma^2 \frac{(1-\beta^2)}{\beta} \operatorname{Log} \frac{1+\beta}{1-\beta} = \frac{a}{\beta} \operatorname{Log} \frac{1+\beta}{1-\beta} \tag{201}$$

ce qui définit la fonction f.

Cela posé, imaginons que l'électron soit soumis à une liaison, de telle façon qu'il y ait une relation entre r et θ ; dans l'hypothèse de Lorentz, cette relation serait $\theta r =$ constante, dans celle de Langevin $\theta^2 r^3 =$ constante. Nous supposerons d'une façon plus générale :

$$r = b\theta^m \tag{202}$$

b étant une constante ; d'où :

$$L = \frac{1}{b\gamma^2}\theta^{-m} f\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) \tag{203}$$

Quelle forme prendra un électron quand la vitesse deviendra β, *si l'on ne suppose pas l'intervention d'autres forces que celles de liaison ?* Cette forme sera définie par l'égalité :

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} = 0 \tag{204}$$

ou :

$$-m\theta^{-m-1} f + \theta^{-m}\frac{f'}{\gamma} = 0 \tag{205}$$

ou :

$$\frac{f'}{f} = \frac{m\gamma}{\theta} \tag{206}$$

Si nous voulons que l'équilibre ait lieu de telle façon que $\theta = \gamma$, il faut que, pour $\theta/\gamma = 1$, la dérivée logarithmique de f soit égale à m.

Si nous développons $1/\gamma$ et le second membre de (201) suivant les puissances de β, l'équation (201) devient, pour $u = 1/\gamma = (1 - \beta^2/2)$:

$$f(u) = a\left(1 + \frac{\beta^2}{3}\right) \tag{207}$$

en négligeant les puissances supérieures de β.

En différentiant, il vient (* *avec* $f'(u) = \mathrm{d}f/\mathrm{d}u$) :

$$-\beta f'(u) = \frac{2}{3}a\beta \tag{208}$$

Pour $\beta = 0$, c'est-à-dire quand $u = 1$, ces équations deviennent :

$$f = a\ ; \qquad f' = -\frac{2}{3}a\ ; \qquad \frac{f'}{f} = \frac{2}{3} \tag{209}$$

On doit donc avoir $m = -2/3$, conformément à l'hypothèse de Langevin.

Ce résultat doit être rapproché de celui qui est relatif à la première équation de (187) et dont en réalité il ne diffère pas. En effet, supposons que tout élément $\mathrm{d}\tau$ de l'électron soit soumis à une force $X\mathrm{d}\tau$ parallèle à l'axe des x, X étant le même pour tous les éléments ; nous aurons alors, conformément à la définition de la quantité de mouvement :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \int X\,\mathrm{d}\tau \tag{210}$$

D'autre part, le principe de moindre action nous donne :

$$J = \int L\,\mathrm{d}t\ ; \qquad \delta J = \int X\,\delta U\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t = \int \delta U \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \tag{211}$$

δU étant le déplacement du centre de masse de l'électron dans la direction de Ox.

L dépend de θ et de r ; si l'on admet que r est lié a θ par l'équation de liaison, on a alors :

$$\delta J = \int \left(\frac{\partial L}{\partial \beta}\delta\beta + \frac{\partial L}{\partial \theta}\delta\theta\right)\mathrm{d}t \tag{212}$$

D'autre part :

$$\delta\beta = \frac{\mathrm{d}(\delta U)}{\mathrm{d}t} \tag{213}$$

d'où, en intégrant par parties :

$$\int P\,\delta\beta\,\mathrm{d}t = -\int \delta U \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\delta J \tag{214}$$

donc les expressions de δJ en (212) et (214) conduisent à :

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -P\ ; \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{215}$$

Mais la dérivée $(\mathrm{d}L/\mathrm{d}\beta)$ de l'équation (187) est prise en supposant θ exprimé en fonction de β, de sorte que :

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\beta} = \frac{\partial L}{\partial \beta} + \frac{\partial L}{\partial \theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\beta} \tag{216}$$

L'équation (187) équivaut donc à l'équation (204).

D'où la conclusion : si l'électron est soumis à une liaison entre ses trois axes, **et si aucune autre force n'intervient en dehors des forces de liaisons**, la forme que prendra cet électron, quand il sera animé d'une vitesse uniforme, ne pourra être telle que l'électron idéal correspondant soit une sphère, que dans le cas où la liaison sera la constance du volume, conformément à l'hypothèse de Langevin.

Nous sommes ainsi amenés de la sorte à nous poser le problème suivant :

Quelles forces supplémentaires, autres que les forces de liaison, serait-il nécessaire de faire intervenir pour rendre compte de la loi de Lorentz ou, plus généralement, de toute loi autre que celle de Langevin ?

L'hypothèse la plus simple, et la première que nous devons examiner, c'est que ces forces supplémentaires admettent un potentiel spécial dérivant des trois axes de l'ellipsoïde, par conséquent de θ et de r ; soit $F(\theta, r)$ ce potentiel ; dans ce cas, l'action aura pour expression :

$$J = \int [L + F(\theta, r)]\,\mathrm{d}t \tag{217}$$

et les conditions d'équilibre s'écriront :

$$\frac{\partial(L+F)}{\partial\theta} = 0 \tag{218}$$

$$\frac{\partial(L+F)}{\partial r} = 0 \tag{219}$$

Si nous supposons r et θ liés par la relation $r = b\theta^m$, nous pourrons regarder r comme fonction de θ, envisager F comme ne dépendant que de θ, et conserver seulement l'équation (218) avec, selon (203) :

$$L = \frac{1}{b\gamma^2\theta^m} f\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) ; \qquad \frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{\theta f' - mf}{b\gamma^2\theta^{m+1}} \tag{220}$$

Il faut que, pour $\gamma = \theta$, les équations (218) et (219) soient satisfaites ; ce qui donne, en tenant compte des équations (209) (*pour lesquelles précisément on a* $\theta/\gamma = 1$) :

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta} = \frac{(3m+2)a}{3b\theta^{m+3}} \tag{221}$$

d'où :

$$F = -\frac{(3m+2)a}{(3m+6)b\theta^{m+2}} \tag{222}$$

et dans l'hypothèse de Lorentz où $m = -1$:

$$F = \frac{a}{3b\theta} \tag{223}$$

Supposons maintenant qu'il n'y ait *aucune* liaison et, considérant r et θ comme deux variables indépendantes, conservons les deux équations (218) et (219) ; il viendra, selon (199) :

$$L = \frac{1}{\gamma^2 r} f\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) ; \qquad \frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{f'}{\gamma^2 r} ; \qquad \frac{\partial L}{\partial r} = -\frac{f}{\gamma^2 r^2} \tag{224}$$

Les équations (218) et (219) doivent être satisfaites pour $\gamma = \theta$; $r = b\theta^m$; ce qui donne :

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{a}{b^2\theta^{2m+2}} ; \qquad \frac{\partial F}{\partial\theta} = \frac{2}{3}\frac{a}{b\theta^{m+3}} \tag{225}$$

Une des manières de satisfaire à ces conditions est de poser :

$$F = Kr^{\alpha}\theta^{\beta} \tag{226}$$

K, α et β étant des constantes ; les équations (225) doivent être satisfaites pour $r = b\theta^m$, ce qui donne (*en éliminant* r) :

$$K\alpha b^{\alpha-1}\theta^{m\alpha-m+\beta} = \frac{a}{b^2\theta^{2m+2}} \ ; \qquad K\beta b^{\alpha}\theta^{m\alpha+\beta-1} = \frac{2}{3}\frac{a}{b\theta^{m+3}} \tag{227}$$

En identifiant, on trouve :

$$\alpha = 3\zeta \ ; \qquad \beta = 2\zeta \ ; \qquad \zeta = -\frac{m+2}{3m+2} \ ; \qquad K = \frac{a}{\alpha b^{\alpha+1}} \tag{228}$$

Mais le volume de l'ellipsoïde est proportionnel à $r^3\theta^2$, de sorte que le potentiel supplémentaire est proportionnel à la puissance ζ du volume de l'électron.

Dans l'hypothèse de Lorentz, on a $m = -1$, $\zeta = 1$.

On retrouve donc l'hypothèse de Lorentz à la condition d'ajouter un potentiel supplémentaire proportionnel au volume de l'électron.

L'hypothèse de Langevin correspond à $\zeta = \infty$.

7. Mouvement quasi stationnaire

> *« Peut-être devons-nous construire toute une nouvelle mécanique que nous ne faisons qu'entrevoir, où l'inertie croissant avec la vitesse, la vitesse de la lumière deviendrait une limite infranchissable. »*
>
> H. Poincaré (1904)[22]

Il reste à voir si cette hypothèse sur la contraction des électrons rend compte de l'impossibilité de mettre en évidence le mouvement absolu, et je commencerai par étudier le mouvement quasi stationnaire d'un électron isolé, ou soumis seulement à l'action d'autres électrons éloignés.

On sait qu'on appelle *mouvement quasi stationnaire* un mouvement où les varia-tions de la vitesse sont assez lentes pour que les énergies magnétique et électrique dues au mouvement de l'électron diffèrent peu de ce qu'elles seraient dans le mouvement uniforme ; on sait également que c'est en partant de cette notion du mouvement quasi stationnaire qu'Abraham est arrivé à celles des masses électromagnétiques transversale et longitudinale.

[22] Poincaré H., « L'état actuel et l'avenir de la physique mathématique, » *Bulletin des Sciences Mathématiques*, tome 28, 2e série (réorganisée 39-1), novembre 1904, page 325.

Je crois devoir préciser. Soit L notre action par unité de temps :

$$L = \frac{1}{2}\int \left(\varepsilon \boldsymbol{E}^2 - \frac{\boldsymbol{B}^2}{\mu}\right) \mathrm{d}\tau \tag{229}$$

où nous ne considérerons pour le moment que les champs électrique et magnétique dus au mouvement d'un électron isolé. Dans la section précédente, considérant le mouvement comme uniforme, nous regardions L comme dépendant de la vitesse $\boldsymbol{v}$ du centre de masse de l'électron (avec alors $\boldsymbol{v} = (\beta, 0, 0)$) et des paramètres r et θ qui définissent la forme de l'électron.

Mais si le mouvement n'est plus uniforme, L dépendra non seulement des valeurs de $\boldsymbol{v}$, r, θ à l'instant considéré, mais aussi des valeurs de ces mêmes quantités à d'autres instants qui pourront en différer de quantités du même ordre que le temps mis par la lumière pour aller d'un point à un autre de l'électron ; en d'autres termes, L dépendra non seulement de $\boldsymbol{v}$, r, θ, mais de leurs dérivées de tous les ordres par rapport au temps.

Eh bien, le mouvement sera dit *quasi stationnaire* quand les dérivées partielles de L par rapport aux dérivées successives de $\boldsymbol{v}$, r, θ seront négligeables devant les dérivées partielles de L par rapport aux quantités $\boldsymbol{v}$, r, θ elles-mêmes. Les équations d'un pareil mouvement pourront s'écrire :

$$\frac{\partial(L+F)}{\partial\theta} = 0\ ; \qquad \frac{\partial(L+F)}{\partial r} = 0 \tag{230}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = -\int \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\tau \tag{231}$$

Dans ces équations F a la même signification que dans la section précédente *(*Dans le cas de Lorentz : $F = Kr^3\theta^2$ et $L = f(u)/\gamma^2 r$ avec $u = \theta/\gamma$ et la fonction $f(u)$ donnée en (201))* ; $\boldsymbol{f}$ est la force par unité de volume qui agit sur l'électron : cette force étant due uniquement aux champs électrique et magnétique produits par les *autres* électrons.

Observons que L ne dépend de $\boldsymbol{v}$ que par l'intermédiaire de son module v :

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{232}$$

On a donc, en appelant encore P la quantité de mouvement et $\boldsymbol{P}$ le vecteur quantité de mouvement *(* et en généralisant la première équation de (215))* :

$$-\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{v}\frac{\partial L}{\partial v} = P\frac{\boldsymbol{v}}{v} = \boldsymbol{P} \tag{233}$$

d'où :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{-\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\right) = \frac{P}{v}\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} - \frac{P\boldsymbol{v}}{v^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\boldsymbol{v}}{v}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{234}$$

avec :

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{235}$$

Si nous prenons la direction actuelle de la vitesse pour axe des x, il vient à l'instant considéré :

$$\boldsymbol{v} = (v_x, 0, 0) = (v, 0, 0)\ ; \qquad \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{236}$$

Avec (231) et (233) l'équation (234) devient :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}P_x}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v_x} = \int f_x\,\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}P_y}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v_y} = \int f_y\,\mathrm{d}\tau = \frac{P}{v}\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\} \tag{237}$$

C'est pourquoi Abraham a donné à $(\mathrm{d}P/\mathrm{d}v)$ le nom de *masse longitudinale* et à (P/v) le nom de *masse transversale* ; rappelons que $P = -(\partial L/\partial v)$.

Ces notions de « masse longitudinale » et de « masse transversale », fonctions croissantes de la vitesse, sont destinées à conserver l'équation fondamentale de la dynamique, c'est à dire : force = masse $\times$ accélération ; mais, bien sûr, elles entraînent de nombreuses confusions.
Sans doute est-il plus simple d'écrire que la loi fondamentale de la dynamique est $\boldsymbol{F} = \mathbf{d}\boldsymbol{P}/\mathrm{d}t$ (la force totale appliquée est égale à la dérivée du vecteur quantité de mouvement) et que ce vecteur quantité de mouvement $\boldsymbol{P}$, égal à $m\boldsymbol{v}$ en mécanique classique, devient $m_\mathrm{o}\boldsymbol{v}/\sqrt{1-v^2}$ en mécanique relativiste de Lorentz, la vitesse de la lumière étant prise pour unité. Le coefficient m_o est alors une constante : c'est la « masse au repos » du corps étudié.

Dans l'hypothèse de Lorentz on obtient *(avec (203),* $\theta = \gamma$, $f(1) = a$ *et* $m = -1$*)* :

$$L = \frac{a}{b}\sqrt{1-v^2}\ ; \qquad P = -\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}v} = \frac{a}{b}\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \tag{238}$$

La « masse au repos » m_o est égale à la constante a/b, soit $3^{1/4}a^{3/4}K^{1/4}$.
En conséquence la « masse longitudinale » $\mathrm{d}P/\mathrm{d}v$ vaut $m_\mathrm{o}(1-v^2)^{-3/2}$ et la « masse transversale » P/v vaut $m_\mathrm{o}(1-v^2)^{-1/2}$; la constante m_o est bien la « masse au repos » aussi bien longitudinale que transversale.

Je pose :

$$\sqrt{1-v^2} = h \tag{239}$$

d'où :

$$P = m_\mathrm{o}\frac{v}{h}\ ; \qquad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}v} = \frac{m_\mathrm{o}}{h^3}\ ; \qquad \frac{1}{v^2}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}v} - \frac{P}{v^3} = \frac{m_\mathrm{o}}{h^3} \tag{240}$$

Nous poserons encore :

$$\boldsymbol{F} = \int \boldsymbol{f} \mathrm{d}\tau = \text{force totale appliquée à l'électron} \tag{241}$$

et nous trouverons pour l'équation du mouvement quasi stationnaire :

$$\frac{1}{h}\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{h^3}\boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\boldsymbol{F}}{m_\mathrm{o}} \tag{242}$$

On remarquera l'identité de ce résultat avec la loi fondamentale de la dynamique relativiste présentée vingt lignes plus haut : $\boldsymbol{F} = \mathbf{d}\boldsymbol{P}/\mathrm{d}t$ avec le vecteur quantité de mouvement $\boldsymbol{P} = m_\mathrm{o}\boldsymbol{v}/\sqrt{1-v^2}$.

Voyons ce que deviennent ces équations par la transformation de Lorentz. Nous poserons :

$$1 - \beta v_x = \lambda \tag{243}$$

et nous aurons d'abord :

$$\lambda v'_x = v_x - \beta \ ; \qquad \lambda v'_y = \frac{v_y}{\gamma} \ ; \qquad \lambda v'_z = \frac{v_z}{\gamma} \tag{244}$$

d'où, avec $h' = \sqrt{1-v'^2}$, l'on tire aisément :

$$\lambda h' = \frac{h}{\gamma} \tag{245}$$

Nous avons également :

$$\mathrm{d}t' = \gamma\lambda\,\mathrm{d}t \tag{246}$$

d'où :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v'_x}{\mathrm{d}t'} &= \frac{1}{\gamma^3\lambda^3}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}v'_y}{\mathrm{d}t'} &= \frac{1}{\gamma^2\lambda^2}\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} + \frac{v_y\beta}{\gamma^2\lambda^3}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}v'_z}{\mathrm{d}t'} &= \frac{1}{\gamma^2\lambda^2}\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \frac{v_z\beta}{\gamma^2\lambda^3}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}\right\} \tag{247}$$

d'où encore :

$$\boldsymbol{v'}\cdot\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v'}}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\gamma^3\lambda^3}\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} - \frac{\beta h^2}{\gamma^3\lambda^4}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \tag{248}$$

Posons d'autre part, par analogie avec (242) :

$$\frac{1}{h'}\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v'}}{\mathrm{d}t'} + \frac{1}{h'^3}\boldsymbol{v'}\left(\boldsymbol{v'}\cdot\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v'}}{\mathrm{d}t'}\right) = \frac{\boldsymbol{F'}}{m_\mathrm{o}} \tag{249}$$

Cette équation du mouvement dans le second système d'axes définit une force $\boldsymbol{F'}$, et l'idéal serait que la correspondance $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F'}$ soit identique à la correspondance obtenue par l'analyse des phénomènes électromagnétiques en (2), (4) ou bien encore en (17), (38).

Compte-tenu de $l = 1$, cette première correspondance conduisait à :

$$F'_x = \frac{F_x - \beta \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}}{\lambda} \;;\quad F'_y = \frac{F_y}{\gamma\lambda} \;;\quad F'_z = \frac{F_z}{\gamma\lambda} \;;\quad \{\lambda = 1 - \beta v_x\} \tag{250}$$

Avec les équations (242)-(249) ci-dessus, ceci est aisé à vérifier, quoique un peu long.

$$\begin{aligned} \frac{F'_x}{m_o} &= \frac{1}{h'}\frac{\mathrm{d}v'_x}{\mathrm{d}t'} + \frac{v'_x}{h'^3}\boldsymbol{v'} \cdot \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v'}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{1}{h\gamma^2\lambda^2}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + (v_x - \beta)\left(\frac{1}{h^3\lambda}\boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} - \frac{\beta}{h\lambda^2}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\right) \end{aligned} \tag{251}$$

tandis que :

$$\frac{F_x - \beta \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}}{m_o\lambda} = \frac{1}{h\lambda}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + \frac{v_x}{h^3\lambda}\boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} - \beta\boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{h\lambda} + \frac{v^2}{h^3\lambda}\right) \tag{252}$$

Il est maintenant aisé de vérifier l'identité des seconds membres de (251) et (252).

De même :

$$\left.\begin{aligned} \frac{F'_y}{m_o} &= \frac{1}{h'}\frac{\mathrm{d}v'_y}{\mathrm{d}t'} + \frac{v'_y}{h'^3}\,\boldsymbol{v'} \cdot \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v'}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{1}{h\gamma\lambda}\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta v_y}{h\gamma\lambda^2}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + \frac{v_y}{h^3\gamma\lambda^2}\left(\lambda\boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} - \beta h^2\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\right) \end{aligned}\right\} \tag{253}$$

tandis que :

$$\frac{F_y}{m_o\gamma\lambda} = \frac{1}{h\gamma\lambda}\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} + \frac{v_y}{h^3\gamma\lambda}\boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{254}$$

ce qui est bien identique à (253).

Symmétriquement il en est de même pour F_z et F'_z.

Ainsi, les équations du mouvement quasi stationnaire ne sont pas altérées par la transformation de Lorentz ; mais cela ne prouve pas que l'hypothèse de Lorentz soit la seule qui conduise à ce résultat.

Pour établir ce point, nous allons nous restreindre, ainsi que l'a fait Lorentz, à certains cas particuliers, ce qui nous suffira évidemment pour démontrer une proposition négative.

Comment allons-nous d'abord étendre les hypothèses sur lesquelles reposait le calcul précédent ?

1°) Au lieu de supposer $l = 1$ dans la transformation de Lorentz, nous supposerons l quelconque.

2°) Au lieu de supposer que F est proportionnel au volume, et par conséquent que L est proportionnel à h, nous supposerons que F est une fonction quelconque de θ et de r, de telle façon que (après avoir remplacé θ et r par leurs valeurs en fonction de v, tirées de (230)) L soit une fonction quelconque de v.

Supposons maintenant que l'on ait $\boldsymbol{v} = (v, 0, 0)$; l'équation (242) prendra la forme exprimée en (234) et (237) :

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v_x} &= \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \int f_x \,\mathrm{d}\tau = F_x \\ -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v_y} &= \frac{P}{v}\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \int f_y \,\mathrm{d}\tau = F_y \end{aligned}\right\} \tag{255}$$

Nous pouvons d'ailleurs poser, pour ce cas particulier :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}v} = q(v) = q(v_x) \; ; \qquad \frac{P}{v} = s(v) = s(v_x) \tag{256}$$

Si les équations du mouvement ne sont pas altérées par la transformation de Lorentz, on devra avoir :

$$\left.\begin{aligned} q(v_x)\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = F_x \; ; \quad s(v_y)\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = F_y \; ; \\ q(v'_x)\frac{\mathrm{d}v'_x}{\mathrm{d}t'} = F'_x \; ; \quad s(v'_y)\frac{\mathrm{d}v'_y}{\mathrm{d}t'} = F'_y \end{aligned}\right\} \tag{257}$$

D'autre part, compte-tenu de l quelconque, mais aussi de $\boldsymbol{v} = (v, 0, 0)$ à l'instant considéré, les équations (2) et (4) (ou bien les équations (17) et (38)) donnent :

$$F'_x = \frac{1}{l^2}F_x \; ; \qquad F' = \frac{1}{l^2\gamma\lambda}F \; ; \qquad\qquad (\lambda = 1 - \beta v_x) \tag{258}$$

Enfin, avec (247) :

$$\frac{\mathrm{d}v'_x}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\gamma^3\lambda^3}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \; ; \qquad \frac{\mathrm{d}v'_y}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\gamma^2\lambda^2}\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \tag{259}$$

La liaison $v_x \to v'_x$ (addition des vitesses dans la transformation de Lorentz) étant :

$$v'_x = \frac{v_x - \beta}{\lambda}, \tag{260}$$

les équations (257)-(260) conduisent à :

$$q(v'_x) = q\frac{v_x - \beta}{\lambda} = \frac{\gamma^3\lambda^3}{l^2}q(vx) \; ; \qquad s(v'_x) = s\left(\frac{v_x - \beta}{\lambda}\right) = \frac{\gamma\lambda}{l^2}s(v_x) \tag{261}$$

En posant $\Omega(v_x) = s(v_x)/q(v_x)$, on peut éliminer l et obtenir l'équation fonctionnelle :

$$\Omega(v'_x) = \Omega\left[\frac{v_x - \beta}{1 - \beta v_x}\right] = \Omega(v_x)\frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta v_x)^2} \tag{262}$$

Cette équation doit être satisfaite pour toutes les valeurs de β et de v_x, elle conduit nécessairement à :

$$\Omega(v) = \Omega(0) \cdot (1 - v^2) \tag{263}$$

comme on peut le voir aisément pour $v_x = 0$, et le vérifier ensuite dans le cas général.

Cependant :

$$\Omega(v) = \frac{s(v)}{q(v)} = \frac{P}{v(\mathrm{d}P/\mathrm{d}v)} \tag{264}$$

Donc :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}v} = \frac{P}{\Omega(0) \cdot (v - v^3)} \tag{265}$$

ce qui s'intègre en :

$$P = A\left(\frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}\right)^m \tag{266}$$

avec $A =$ constante et $m = \dfrac{1}{\Omega(0)}$.

On trouve alors :

$$s(v) = \frac{P}{v} = Av^{m-1}(1 - v^2)^{-m/2} \tag{267}$$

et, avec (261) :

$$(v - \beta)^{m-1}(1 - \beta^2)^{(1-m)/2} = \frac{v^{m-1}}{l^2} \tag{268}$$

Comme l, lié au changement du système d'axes, ne dépend que de β (s'il y a plusieurs électrons, l doit être le même pour tous même si leur vitesses v sont différentes), l'identité (268) ne peut avoir lieu que si l'on a :

$$m = 1\ ; \qquad l = 1 \tag{269}$$

Ainsi, **l'hypothèse de Lorentz est la seule qui soit compatible avec l'impossibilité de mettre en évidence le mouvement absolu** ; si l'on admet cette impossibilité, il faut admettre que les électrons (*les particules chargées*) en mouvement se contractent de façon à devenir des ellipsoïdes de révolution dont deux axes demeurent constants ; il faut donc admettre, comme nous l'avons montré dans la section précédente, l'existence d'un potentiel supplémentaire proportionnel au volume de l'électron.

L'analyse de Lorentz se trouve donc pleinement confirmée, mais nous pouvons mieux nous rendre compte de la vraie raison du fait qui nous occupe ; cette raison doit être cherchée dans les considérations de la section 4. **Les transformations qui n'altèrent pas les équations du mouvement doivent former un groupe, et cela ne peut avoir lieu que si $\boldsymbol{l = 1}$.** Comme nous ne devons pas pouvoir reconnaître si un électron est en repos ou en mouvement absolu, il faut que, quand il est en mouvement, il subisse une déformation qui doit être précisément celle que lui impose la transformation correspondante du groupe.

Dans cette section les principaux résultats obtenus par Poincaré sont donc les suivants :
A) La loi fondamentale de la dynamique relativiste généralise celle de la mécanique classique :

$$\text{force appliquée} = \boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} \tag{270}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \boldsymbol{P} = \text{vecteur quantité de mouvement} = m_{\mathrm{o}} \dfrac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2}} \\ m_{\mathrm{o}} = \text{constante} = \text{« masse au repos » du corps étudié.} \end{cases}$$

B) L'expression du Lagrangien L pour un point matériel :

$$L = m_{\mathrm{o}}\sqrt{1-v^2} \tag{271}$$

On notera que la loi fondamentale (270) a déjà été obtenue en section 1 dans le cas particulier des forces électromagnétiques. Mais la présente analyse n'est basée que sur les propriétés d'invariance par rapport aux transformations du groupe de Lorentz et est indépendante de la nature des forces agissant sur le point matériel.
Les équations de la mécanique relativiste ainsi établies sont donc de nature générale.
Bien entendu, l'analyse faite dans cette section ne concerne que les mouvements quasi stationnaires, c'est-à-dire ceux à faible accélération ; elle sera étendue sans modification aux mouvements généraux dans la section suivante.
En section 9, Poincaré montrera que les quadrivecteurs $(\gamma, \gamma\boldsymbol{v})$ et $(\gamma T, \gamma\boldsymbol{F})$, avec $T = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}$, sont transformés par les transformations de Lorentz exactement comme le quadrivecteur spatio-temporel $(t, \boldsymbol{r})$.

8. Mouvement quelconque

Les résultats précédents ne s'appliquent qu'au mouvement quasi-stationnaire, mais il est aisé de les étendre au cas général ; il suffit d'appliquer les principes de la section 3, c'est-à-dire de partir du principe de moindre action.

À l'expression de l'action :

$$J = \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau \left[\frac{\varepsilon\boldsymbol{E}^2}{2} - \frac{\boldsymbol{B}^2}{2\mu}\right] \tag{272}$$

il convient d'ajouter un terme, représentant le potentiel supplémentaire F de la section 6 ; ce terme prendra évidemment la forme :

$$J_1 = \int \sum(F)\,\mathrm{d}t \tag{273}$$

où $\sum(F)$ représente la somme des potentiels supplémentaires dus aux différents électrons, chacun d'eux étant proportionnel au volume de l'électron correspondant.

L'action totale est alors $J + J_1$. Nous avons vu à la section 3 que J n'est pas altéré par une transformation de Lorentz ; il faut montrer maintenant qu'il en est de même de J_1.

On a, pour l'un des électrons :

$$F = \omega\tau = \int \omega\,\mathrm{d}\tau \tag{274}$$

ω étant un coefficient spécial à l'électron et τ son volume (* *rappelons qu'en 1905, le mot « électron » désigne n'importe quelle particule chargée et que donc le coefficient ω peut être très variable d'une particule à l'autre*), donc dans l'expression de l'intégrale, où $\mathrm{d}\tau$ est l'élément de volume, le facteur ω est une fonction qui est nulle à l'extérieur de l'électron et égale à ce coefficient spécial à l'intérieur.

On a alors, en tenant compte de tous les électrons :

$$J_1 = \int \omega\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \tag{275}$$

et, après la transformation de Lorentz :

$$J_1' = \int \omega'\,\mathrm{d}\tau'\,\mathrm{d}t' \tag{276}$$

Or, on a $\omega = \omega'$, précisément pour que F soit proportionnel au volume de l'électron et parce que si un point de l'espace-temps appartient à un électron avant la transformation il appartient au *même électron* après la transformation.

D'autre part, grâce à (142) et (100) :

$$l = 1\ ; \qquad \mathrm{d}\tau'\,\mathrm{d}t' = l^4\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t. \tag{277}$$

On a donc :

$$J_1' = J1 \tag{278}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Le théorème est donc général, il nous donne en même temps une solution de la question que nous nous posions à la fin de la section 1 : trouver des forces complémentaires non altérées par la transformation de Lorentz. Le potentiel supplémentaire F satisfait à cette condition.

Nous pouvons généraliser le résultat énoncé à la fin de la section 1 et écrire :

Si l'inertie des électrons est exclusivement d'origine électromagnétique, s'ils ne sont soumis qu'à des forces d'origine électromagnétique ou aux forces qui engendrent le potentiel supplémentaire F, aucune expérience ne pourra mettre en évidence le mouvement absolu.

Quelles sont alors ces forces qui engendrent le potentiel F ? Elles peuvent évidemment être assimilées à un pression qui régnerait à l'intérieur de l'électron ; tout se passe comme si chaque électron était une capacité creuse soumise à une pression interne constante (indépendante du volume) ; le travail d'une pareille pression serait évidemment proportionnel aux variations du volume.

Je dois observer toutefois que cette pression est négative.

Reprenons l'équation (226) de la section 6 qui, dans l'hypothèse de Lorentz, s'écrit :

$$F = Kr^3\theta^2 \tag{279}$$

Avec $\zeta = 1$ dans le cas de Lorentz, les équations (228) donnent :

$$K = \frac{a}{3b^4} \tag{280}$$

Notre pression est proportionnelle à K avec un coefficient constant, qui d'ailleurs est négatif.

> Le modèle de particule chargée ici considéré est le prototype de l'un des plus courants modèles modernes, celui des quarks dont l'élément essentiel est une densité de volume correspondant à une pression intérieure négative.

Évaluons maintenant la masse de l'électron, je veux parler de la « masse expérimentale », c'est-à-dire de la masse pour des vitesses faibles (* *appelée aujourd'hui « masse au repos »* m_o).

Avec (238) nous avons :

$$L = \frac{a}{b}\sqrt{1 - v^2} \tag{281}$$

Pour v très petit, je puis écrire :

$$L = \frac{a}{b}\left(1 - \frac{v^2}{2}\right) \tag{282}$$

de sorte que la masse, tant longitudinale que transversale, sera (a/b).

Or a est une constante numérique, ce qui montre que *la pression qui engendre notre potentiel supplémentaire est proportionnelle à la quatrième puissance de la masse expérimentale de l'électron.*

Comme l'attraction newtonienne est proportionnelle à cette masse expérimentale, on est tenté de conclure qu'il y a quelque relation entre la cause qui engendre la gravitation et celle qui engendre ce potentiel supplémentaire.

9. Hypothèses sur la gravitation

« La masse a deux aspects : c'est à la fois un coefficient d'inertie et une masse attirante entrant comme facteur dans l'attraction newtonienne. Si le coefficient d'inertie n'est pas constant, la masse attirante pourra-t-elle l'être ? Voilà la question.[23] »

Ainsi la théorie de Lorentz expliquerait complètement l'impossibilité de mettre en évidence le mouvement absolu, si toutes les forces étaient d'origine électromagnétique.

Mais il y a des forces auxquelles on ne peut pas attribuer une origine électromagnétique, par exemple la gravitation. Il peut arriver, en effet, que deux systèmes de corps produisent des champs électriques équivalents, c'est-à-dire exerçant la même action sur des corps électrisés et sur des courants, et que cependant ces deux systèmes n'exercent pas la même action gravifique sur les masses newtoniennes. Le champ gravifique est donc distinct du champ électromagnétique. Lorentz a donc été obligé de compléter son hypothèse en supposant que *les forces de toute origine, et en particulier la gravitation, sont affectées par une translation* (ou, si l'on aime mieux, par la transformation de Lorentz) *de la même manière que les forces électromagnétiques.*

Il convient maintenant d'entrer dans les détails et d'examiner de plus près cette hypothèse. Si nous voulons que la force newtonienne soit affectée de cette façon par la transformation de Lorentz, nous ne pouvons plus admettre que cette force dépende uniquement de la position relative du corps attirant et du corps attiré à l'instant considéré. Elle devra dépendre en outre de la vitesse des deux corps. Et ce n'est pas tout : il sera naturel de supposer que la force qui agit à l'instant t sur le corps attiré dépend de la position et de la vitesse de ce corps à ce même instant t ; mais elle dépendra, en outre, de la position et de la vitesse du corps *attirant* non pas à l'instant t, mais à un *instant antérieur*, comme si la gravitation avait mis un certain temps à se propager.

Envisageons donc la position du corps attiré à l'instant t_o et soient à cet instant $\boldsymbol{r_o}$ sa position et $\boldsymbol{v}$ sa vitesse ; considérons d'autre part le corps attirant à l'instant correspondant $t_o + t$ et soient à cet instant $\boldsymbol{r_o} + \boldsymbol{r}$ sa position et $\boldsymbol{v_1}$ sa vitesse.

Nous devons d'abord avoir une relation :

$$f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v_1}) = 0 \tag{283}$$

pour définir le temps t. Cette relation définira la loi de la propagation de l'action gravifique (je n'impose nullement la condition que la propagation se fasse avec la même vitesse dans tous les sens).

[23] Poincaré H., « L'état actuel et l'avenir de la Physique mathématique, » *Bulletin des sciences mathématiques*, tome 28, 2e série (réorganisé 39-1), novembre 1904, p. 317.

Soit maintenant $\boldsymbol{F}$ l'action exercée à l'instant t_o sur le corps attiré ; il s'agit d'exprimer $\boldsymbol{F}$ en fonction de t, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v_1}$.

Quelles sont les conditions à remplir ?

1°) La condition (283) ne devra pas être affectée par les transformations du groupe de Lorentz.

2°) Les composantes de $\boldsymbol{F}$ devront être affectées par les transformations de Lorentz de la même manière que les forces électromagnétiques, c'est-à-dire conformément aux équations (250).

3°) Quand deux corps sont au repos, on devra retomber sur la loi ordinaire de l'attraction.

Il importe de remarquer que, dans ce dernier cas, la relation (283) disparaît, car le temps ne joue plus aucun rôle si les deux corps sont au repos.

Le problème ainsi posé est évidemment indéterminé. Nous chercherons donc à satisfaire autant que possible à d'autres conditions complémentaires.

4°) Les observations astronomiques ne semblant pas montrer de dérogation sensible à la loi de Newton, nous choisirons la solution qui s'écarte le moins de cette loi, pour de faibles vitesses des deux corps.

5°) Nous nous efforcerons de nous arranger de façon que t soit toujours négatif ; si en effet on conçoit que l'effet de la gravitation demande un certain temps pour se propager, il serait plus difficile de comprendre comment cet effet pourrait dépendre de la position *non encore atteinte* par le corps attirant.

Il y a un cas où l'indétermination du problème disparaît ; c'est celui où les deux corps sont en repos *relatif* l'un par rapport à l'autre, c'est-à-dire où $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_1}$; c'est donc ce cas que nous allons examiner d'abord, en supposant que ces vitesses sont constantes, de telle sorte que les deux corps sont entraînés dans un mouvement de translation commun rectiligne et uniforme.

Nous pourrons supposer que l'axe des x a été pris parallèle à cette translation, de telle façon que $v_y = v_z = 0$, et nous prendrons $\beta = v_x$.

Si, dans ces conditions, nous appliquons la transformation de Lorentz, après la transformation les deux corps seront au repos et l'on aura $\boldsymbol{v'} = 0$.

Alors la force $\boldsymbol{F'}$ devra être conforme à la loi de Newton et l'on aura à un facteur constant près :

$$\boldsymbol{F'} = -\frac{\boldsymbol{r'}}{r'^3} \tag{284}$$

Mais l'on a, d'après (8) et (250), et compte-tenu de $l = 1$:

$$\left.\begin{aligned} &x' = \gamma(x - \beta t) \ ; \qquad y' = y \ ; \qquad z' = z \ ; \qquad t' = \gamma(t - \beta x) \\ &\lambda = 1 - \beta v_x = 1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \ ; \\ &F'_x = F_x \ ; \qquad F'_y = \gamma F_y \ ; \qquad F'_z = \gamma F_z \end{aligned}\right\} \tag{285}$$

On a d'ailleurs :

$$x - \beta t = x - v_x t \ ; \qquad r'^2 = \gamma^2 (x - v_x t)^2 + y^2 + z^2 \tag{286}$$

et :

$$F_x = -\frac{\gamma(x - v_x t)}{r'^3} \ ; \qquad F_y = -\frac{y}{\gamma r'^3} \ ; \qquad F_z = -\frac{z}{\gamma r'^3}, \tag{287}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}} \qquad \text{avec : } V = \frac{1}{\gamma r'} \tag{288}$$

Il semble d'abord que l'indétermination subsiste, puisque nous n'avons fait aucune hypothèse sur la valeur de t, c'est-à-dire sur la rapidité de la transmission ; et que d'ailleurs x est fonction de t ; mais il est aisé de voir que $x - v_x t$, y, z, qui figurent seuls dans nos formules, ne dépendent pas de t.

On voit que si les deux corps sont simplement animés d'une translation commune, la force qui agit sur le corps attiré est normale à un ellipsoïde ayant pour centre le corps attirant.

Pour aller plus loin il faut chercher *les invariants du groupe de Lorentz.*

> L 'exposé qui suit présente une formulation générale des principes mathématiques de la théorie de la relativité, y compris le calcul tensoriel et l'examen des invariants du groupe de Lorentz, invariants associés aux quantités physiques et à leurs relations. Ici, pour la première fois, Poincaré considéra les transformations du groupe de Lorentz comme des rotations d'un hyperespace à quatre dimensions, un hyperespace dont les coordonnées sont les coordonnées spatiales x, y, z et le « temps imaginaire » $t\sqrt{-1}$, ce qui conserve la forme quadratique $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$.
> À la suite de Poincaré, Minkowsky développa tous ces arguments qui concernent l'unité de l'espace et du temps. L'« espace-temps » de la relativité restreinte a une géométrie « pseudo-euclidienne ». Dans son célèbre exposé de Cologne, devant un aréopage de scientifiques et de docteurs venus de toute l'Allemagne, exposé décisif pour la vulgarisation de la théorie de la relativité, Hermann Minkowsky développa ses idées comme suit :
> *« Mesdames et Messieurs, les notions d'espace et de temps, que j'ai l'intention de développer ici, sont basées sur des expériences physiques. C'est pourquoi elles sont solides. Le changement est radical. Dorénavant l'espace et le temps traditionnels vont devenir des fictions tandis que seulement une certaine forme liée aux deux conceptions va conserver un sens physique réel et indépendant.*[24] »

Nous savons que les substitutions de ce groupe sont les substitutions linéaires qui n'altèrent pas la forme quadratique :

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 \tag{289}$$

[24] Minkowski H., "Raum und Zeit", Vortrage von der 80. Naturforchersammlung zu Köln, *Physikalische Zeitschrift*, B.10, N.3 - Seite 104-111, 1909.

Posons d'autre part :

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{\delta r}}{\delta t} \;; \quad \boldsymbol{\delta r} = (\delta x,\, \delta y,\, \delta z) \;; \quad \boldsymbol{v_1} = \frac{\boldsymbol{\delta_1 r}}{\delta t} \;; \quad \boldsymbol{\delta_1 r} = (\delta_1 x,\, \delta_1 y,\, \delta_1 z) \tag{290}$$

Nous voyons que la transformation de Lorentz aura pour effet de faire subir à $\boldsymbol{\delta r}$, δt, $\boldsymbol{\delta_1 r}$, $\delta_1 t$ les mêmes substitutions linéaires qu'à $\boldsymbol{r}$ et t.

Regardons

$$x,\; y,\; z,\; t\sqrt{-1} \;; \quad \delta x,\; \delta y,\; \delta z,\; \delta t\sqrt{-1} \;; \quad \delta_1 x,\; \delta_1 y,\; \delta_1 z,\; \delta_1 t\sqrt{-1} \tag{291}$$

comme les coordonnées de trois points P, P', P'' dans l'espace à quatre dimensions. Nous voyons que la transformation de Lorentz n'est qu'une rotation de cet espace autour de l'origine regardée comme fixe. Nous n'aurons pas d'autres invariants distincts que les six distances des trois P, P', P'' entre eux et à l'origine, ou, si l'on aime mieux, que les deux expressions :

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 \;; \qquad x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z - t\,\delta t \tag{292}$$

ou les quatre expressions de même forme qu'on en déduit en permutant d'une manière quelconque les trois points P, P', P''.

Mais ce que nous cherchons ce sont des fonctions des dix variables t, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v_1}$ qui sont des invariants ; nous devons donc, parmi les combinaisons de nos six invariants, rechercher celles qui ne dépendent que de ces dix variables, c'est-à-dire celles qui sont homogènes de degré zéro tant par rapport à δx, δy, δz, δt que par rapport à $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$, $\delta_1 t$. Il nous restera quatre invariants distincts qui sont :

$$\boldsymbol{r}^2 - t^2 \;; \quad \frac{t - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}} \;; \quad \frac{t - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v_1}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v_1}^2}} \;; \quad \frac{1 - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v_1}}{\sqrt{(1-\boldsymbol{v}^2)(1-\boldsymbol{v_1}^2)}} \;; \tag{293}$$

Occupons-nous maintenant des transformations subies par les composantes de la force ; reprenons les équations (36) de la première section qui se rapportent non à la force $\boldsymbol{F}$ que nous examinons ici, mais à la force $\boldsymbol{f}$ rapportée à l'unité de volume. Posons d'ailleurs :

$$f_t = \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} \tag{294}$$

nous verrons que ces équations (36) peuvent s'écrire ($l = 1$) :

$$f'_x = \gamma(f_x - \beta f_t) \;; \quad f'_y = f_y \;; \quad f'_z = f_z \;; \quad f'_t = \gamma(f_t - \beta f_x) \tag{295}$$

de sorte que $\boldsymbol{f}$, f_t subissent la même transformation que $\boldsymbol{r}$, t ; les invariants du groupe seront donc :

$$\boldsymbol{f}^2 - f_t^2 \;; \quad \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{r} - f_t\, t \;; \quad \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\delta r} - f_t\,\delta t \;; \quad \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\delta_1 r} - f_t\,\delta_1 t \tag{296}$$

Mais ce n'est pas de $\boldsymbol{f}$, f_t dont nous avons besoin, c'est de $\boldsymbol{F}$, T avec :

$$T = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \tag{297}$$

Nous voyons que :

$$\rho \boldsymbol{F} = \boldsymbol{f} \ ; \qquad \rho T = f_t \tag{298}$$

Donc la transformation de Lorentz agira sur $\rho\boldsymbol{F}$, ρF_t de la même manière que sur $\boldsymbol{f}$, f_t.

De même $\delta t\, \boldsymbol{v}$, δt égal à $\boldsymbol{\delta r}$, δt avec **le même rapport** ρ'/ρ et $\delta t'/\delta t$ car :

$$\frac{\rho'}{\rho} = \gamma(1 - \beta v_x) = \frac{1}{\gamma(1 + \beta v'_x)} = \sqrt{\frac{1 - v^2}{1 - v'^2}} = \frac{\delta t'}{\delta t} \tag{299}$$

Considérons alors $\boldsymbol{f}$, $f_t\sqrt{-1}$ comme les coordonnées d'un point Q ; alors les invariants seront les fonctions des distances mutuelles des cinq points :

$$O,\ P,\ P',\ P'',\ Q \tag{300}$$

et parmi ces fonctions, nous devons conserver seulement celles qui sont homogènes de degré zéro, par rapport à $\boldsymbol{f}$, f_t, $\boldsymbol{\delta r}$, δt et encore par rapport à $\boldsymbol{\delta_1 r}$, $\delta_1 t$. Grâce à l'homogénéité on peut ensuite remplacer ces variables par $\boldsymbol{F}$, T ; $\boldsymbol{v}$, 1 et $\boldsymbol{v_1}$, 1 respectivement.

Nous trouvons ainsi, outre les quatre invariants (293), quatre invariants distincts nouveaux, qui sont :

$$\frac{\boldsymbol{F}^2 - T^2}{1 - v^2}\ ; \quad \frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r} - Tt}{\sqrt{1 - v^2}}\ ; \quad \frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v_1} - T}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - v_1^2)}}\ ; \quad \frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} - T}{1 - v^2} \tag{301}$$

Le dernier invariant est toujours nul, d'après la définition de T.

Ayant découvert le groupe de Lorentz et l'invariant fondamental $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$, Poincaré établit qu'une série de quantités physiques sont des « quadrivecteurs » qui varient comme les coordonnées d'espace et de temps lors des transformations de Lorentz.

Nous pouvons présenter la liste suivante :

– les coordonnées d'espace et de temps : $(\boldsymbol{r}, t)$;

– la force par unité de volume et le travail par unité de temps : $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v})$;

– le courant et la charge par unité de volume : $(\rho\boldsymbol{v}, \rho)$;

– le quadrivecteur $\left[\dfrac{(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v})}{\sqrt{1 - v^2}}\right]$, avec $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = T$;

– le quadrivecteur quantité de mouvement-énergie : $\left[\dfrac{m_{\text{o}}(\boldsymbol{v}, 1)}{\sqrt{1 - v^2}}\right]$, que l'on écrit parfois $(m\boldsymbol{v}, m)$, la masse m étant la « masse transversale », croissante avec la vitesse et égale à $m_{\text{o}}/\sqrt{1 - v^2}$ (rappelons que la vitesse de la lumière est prise pour unité) ;

– les potentiels vecteur et scalaire : $(\boldsymbol{A}, \varphi)$.

Cela posé quelles sont les conditions à remplir ?

1°) Le premier membre de la relation (283) qui définit la vitesse de propagation, doit être une fonction des quatre invariants (293).

On peut faire évidemment une foule d'hypothèses, nous n'en examinerons que deux :

A) On peut avoir :

$$r^2 - t^2 = 0 \;; \quad \text{d'où } t = -r \text{ puisque } t < 0 \tag{302}$$

Cela veut dire que la vitesse de propagation de la gravitation est égale à celle de la lumière.

Il semble d'abord que cette hypothèse doive être rejetée sans examen. Laplace a montré en effet que la propagation est, ou bien instantanée, ou beaucoup plus rapide que celle de la lumière. Mais Laplace avait examiné l'hypothèse de la vitesse finie de propagation, *ceteris non mutatis* (sans autre changement) ; ici, au contraire, cette hypothèse est compliquée de beaucoup d'autres, et il peut se faire qu'il y ait entre elles une compensation plus ou moins parfaite, comme celles dont les applications de la transformation de Lorentz nous ont déjà donné tant d'exemples.

B) On peut avoir :

$$\frac{t - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v_1}}{\sqrt{1-v^2}} = 0, \quad \text{soit : } \quad t = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v_1} \tag{303}$$

La vitesse de propagation est alors beaucoup plus rapide que celle de la lumière ; mais, dans certains cas, t pourrait être positif, ce qui, comme nous l'avons dit, ne paraît guère admissible. *Nous nous en tiendrons donc à l'hypothèse A.*

2°) Les quatre invariants de (301) doivent être des fonctions des invariants de (293) (* *pour des particules attirante et attirée données*).

3°) Quand deux corps sont au repos absolu, $\boldsymbol{F}$ doit avoir la valeur déduite de la loi de Newton, et quand ils sont en repos relatif, la valeur déduite des équations (287).

Dans l'hypothèse du repos absolu, les deux invariants de (301) doivent se réduire à :

$$F^2 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r} \tag{304}$$

ou, par la loi de Newton, à :

$$\frac{1}{r^4} \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{r}$$

d'autre part, dans l'hypothèse A, le deuxième et le troisième des invariants de (293) deviennent :

$$\frac{-r - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{-r - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v_1}}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{305}$$

c'est-à-dire, pour le repos absolu, à :

$$-r \qquad \text{et} \qquad r$$

Nous pouvons donc admettre *par exemple* que les deux premiers invariants de (301) se réduisent à :

$$\frac{(1-v_1^2)^2}{(r+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v_1})^4} \qquad \text{et} \qquad -\frac{\sqrt{1-v_1^2}}{r+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v_1}}, \tag{306}$$

mais d'autre combinaisons sont possibles.

Il faut faire un choix entre ces différentes combinaisons, et, d'autre part, pour définir $\boldsymbol{F}$, il nous faut une troisième équation. Pour un pareil choix, nous devons nous efforcer de nous approcher autant que possible de la loi de Newton. Voyons donc ce qui se passe quand (faisant toujours $t=-r$) on néglige les carrés des vitesses $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{v_1}$. Les quatre invariants de (293) deviennent alors :

$$0\ ; \qquad -r-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}\ ; \qquad -r-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v_1}\ ; \qquad 1 \tag{307}$$

et les quatre invariants de (301) :

$$\boldsymbol{F}^2\ ; \qquad \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{r}+r\boldsymbol{v})\ ; \qquad \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{v_1}-\boldsymbol{v})\ ; \qquad 0 \tag{308}$$

Mais pour pouvoir comparer avec la loi de Newton, une autre transformation est nécessaire ; ici, $\boldsymbol{r_o}+\boldsymbol{r}$ représentent la position du corps attirant à l'instant t_o+t avec $r=|\boldsymbol{r}|$; dans la loi de Newton, il faut envisager la position $\boldsymbol{r_o}+\boldsymbol{r_1}$ du corps attirant à l'instant t_o, avec $r_1=|\boldsymbol{r_1}|$.

Nous pouvons négliger le carré du temps nécessaire à la propagation et par conséquent faire comme si le mouvement était uniforme ; nous avons alors :

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r_1}+\boldsymbol{v_1}t \tag{309}$$

et, en négligeant le carré de $\boldsymbol{v_1}$:

$$r(r-r_1)=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v_1}t \tag{310}$$

or, puisque $t=-r$ (* *et donc* $r_1=r+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v_1}$), les quatre invariants (293) deviennent :

$$0\ ; \qquad -r_1+\boldsymbol{r}(\boldsymbol{v_1}-\boldsymbol{v})\ ; \qquad -r_1\ ; \qquad 1 \tag{311}$$

et les quatre invariants (301) :

$$\boldsymbol{F}^2\ ; \qquad \boldsymbol{F}\big[\boldsymbol{r_1}+r_1(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v_1})\big]\ ; \qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{v_1}-\boldsymbol{v})\ ; \qquad 0. \tag{312}$$

Dans la seconde de ces expressions j'ai écrit r_1 au lieu de r, parce qu'il y est multiplié par $(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v_1})$ et que je néglige le carré des vitesses.

D'autre part la loi de Newton nous donnerait, pour ces quatre invariants (312) :

$$\frac{1}{r_1^4}\ ; \qquad \left\{\frac{\boldsymbol{r_1}\cdot(\boldsymbol{v_1}-\boldsymbol{v})}{r_1^2}-\frac{1}{r_1}\right\}\ ; \qquad \frac{\boldsymbol{r_1}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v_1})}{r_1^3}\ ; \qquad 0. \tag{313}$$

Si donc nous appelons A et B les deuxième et troisième invariants de (311), et M, N, P les trois premiers invariants de (312), nous satisferons à la loi de Newton, aux termes près de l'ordre du carré des vitesses, en faisant :

$$M=\frac{1}{B^4}\ ; \qquad N=\frac{A}{B^2}\ ; \qquad P=\frac{A-B}{B^2}. \tag{314}$$

Cette solution n'est pas unique. Soit en effet C le quatrième invariant de (311) ; $C-1$ est de l'ordre du carré des vitesses et il en est de même de $(A-B)^2$.

Nous pourrions donc ajouter aux deuxième membres de chacune des équations (314) un terme formé de $(C-1)$ ou bien de $(A-B)^2$ multiplié par une fonction arbitraire de A, B, C.

Au premier abord, la solution (314) paraît la plus simple ; elle ne peut néanmoins être adoptée ; en effet, comme M, N, P sont des fonctions de $\boldsymbol{F}$ et de $T=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$, on peut tirer de ces trois équations (314) la valeur de $\boldsymbol{F}$ mais, dans certains cas, cette valeur deviendrait imaginaire.

Pour éviter cet inconvénient, nous opérerons d'une autre manière. Posons :

$$\gamma_0=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\ ; \qquad \gamma_1=\frac{1}{\sqrt{1-v_1^2}}, \tag{315}$$

ce qui est justifié par l'analogie avec la notation :

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{316}$$

qui figure dans la substitution de Lorentz.

Dans ce cas, et à cause de la condition $r=-t$, les invariants (293) deviennent :

$$0\ ; \quad A=-\gamma_0(r+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\ ; \quad B=-\gamma_1(r+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v_1})\ ; \quad C=\gamma_0\gamma_1(1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v_1}). \tag{317}$$

D'autre part, nous voyons que les systèmes suivants de quantités :

$$(\boldsymbol{r},t)\ ; \qquad (\gamma_0\boldsymbol{F},\gamma_0 T)\ ; \qquad (\gamma_0\boldsymbol{v},\gamma_0)\ ; \qquad (\gamma_1\boldsymbol{v},\gamma_1) \tag{318}$$

subissent les *mêmes* substitutions linéaires quand on leur applique les transformations du groupe de Lorentz *(* comme nous l'avions noté après l'équation (301))*. Nous sommes conduit à poser :

$$\boldsymbol{F}=\frac{a}{\gamma_0}\boldsymbol{r}+b\boldsymbol{v}+\frac{c\gamma_1}{\gamma_0}\boldsymbol{v_1}\ ;\ \text{et, avec } t=-r\ :T=\frac{-ar}{\gamma_0}+b+\frac{c\gamma_1}{\gamma_0} \tag{319}$$

Il est clair que si a, b, c sont des invariants, $\boldsymbol{F}$, T satisferont à la condition fondamentale, c'est-à-dire subiront, par l'effet de transformations de Lorentz, une substitution linéaire convenable.

Mais pour que les équations (319) soient compatibles, il faut que l'on ait $T - \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = 0$, ce qui, en les remplaçant par leurs valeurs en (319) et en multipliant par γ_0^2 devient :

$$Aa + b + Cc = 0 \tag{320}$$

Ce que nous voulons, c'est que si l'on néglige, devant le carré de la vitesse de la lumière, les carrés des vitesses $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{v_1}$, ainsi que le produit des accélérations par les distances, comme nous l'avons fait plus haut, les valeurs de $\boldsymbol{F}$ restent conformes à la loi de Newton.

Nous pourrons prendre :

$$b = 0 \ ; \qquad c = \frac{-Aa}{C}. \tag{321}$$

Avec l'ordre d'approximation adopté, on a :

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_0 = \gamma_1 = 1 \ ; \quad C = 1 \ ; \quad A = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{v}) - r_1 \ ; \\ B = -r_1 \ ; \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_1} + \boldsymbol{v_1} t = \boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{v_1} r \end{array}\right\} \tag{322}$$

La première équation (319) deviendra alors :

$$\boldsymbol{F} = a(\boldsymbol{r} - A\boldsymbol{v_1}) \tag{323}$$

Mais si l'on néglige le carré des vitesses, on peut remplacer $A\boldsymbol{v_1}$ par $-r_1\boldsymbol{v_1}$ ou encore par $-r\boldsymbol{v_1}$, ce qui donne :

$$\boldsymbol{F} = a(\boldsymbol{r} + r\boldsymbol{v_1}) = a\boldsymbol{r_1} \tag{324}$$

La loi de Newton donnerait :

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\boldsymbol{r_1}}{r_1^3} \tag{325}$$

Nous devons donc choisir, pour l'invariant a, celui qui se réduit à $-1/r_1^3$ à l'ordre d'approximation adopté, c'est-à-dire $1/B^3$. Les équations (319) deviendront :

$$\boldsymbol{F} = \frac{C\boldsymbol{r} - \gamma_1 A\boldsymbol{v_1}}{\gamma_0 B^3 C} \ ; \qquad T = -\frac{Cr + \gamma_1 A}{\gamma_0 B^3 C} \tag{326}$$

Nous voyons d'abord que l'attraction corrigée se compose de deux composantes : l'une parallèle au vecteur qui joint les positions des deux corps, l'autre parallèle à la vitesse du corps attirant.

Rappelons que, quand nous parlons de la position ou de la vitesse du corps attirant, il s'agit de sa position ou de sa vitesse au moment où l'onde gravifique le quitte ; pour le corps attiré, au contraire, il s'agit de sa position ou de sa vitesse du moment où l'onde gravifique l'atteint, cette onde étant supposée se propager avec la vitesse de la lumière.

Je crois qu'il serait prématuré de vouloir pousser plus loin la discussion de ces formules ; je me bornerai donc à quelques remarques.

1°) Les solutions de (326) ne sont pas uniques ; on peut, en effet, remplacer $1/B^3$, qui entre en facteur partout, par :

$$\frac{1}{B^3} + (C-1)f_1(A,B,C) + (A-B)^2 f_2(A,B,C), \tag{327}$$

f_1 et f_2 étant des fonctions arbitraires de A, B, C, ou encore ne plus prendre b nul, mais ajouter à a, b, c des termes complémentaires quelconques, pourvu qu'ils satisfassent à la condition (320) et qu'ils soient du deuxième ordre par rapport aux vitesses $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{v_1}$, en ce qui concerne a et du premier ordre en ce qui concerne b et c.

2°) La première équation de (326) peut s'écrire :

$$\boldsymbol{F} = \frac{\gamma_1}{B^3 C}\big[\boldsymbol{r}(1 - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v_1}) + \boldsymbol{v_1}(r + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\big] \tag{328}$$

et la quantité entre crochets peut elle-même s'écrire :

$$\boldsymbol{r} + r\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{v_1}\times\boldsymbol{r}), \tag{329}$$

de sorte que la force totale peut être partagée en trois composantes correspondant aux trois termes de l'expression (329) ; la première composante a une vague analogie avec la force mécanique due au champ électrique, les deux autres avec la force mécanique due au champ magnétique ; pour compléter l'analogie, je puis, en vertu de la première remarque, remplacer dans la première équation (326) le terme $\gamma_1 A\boldsymbol{v_1}$ par $C\gamma_1 A\boldsymbol{v_1}$ de façon que $\boldsymbol{F}$ ne dépende plus que linéairement de la vitesse $\boldsymbol{v}$ du corps attiré (C disparaît du dénominateur de (328)). Posons alors :

$$\boldsymbol{e} = \gamma_1(\boldsymbol{r} + r\boldsymbol{v_1}) \ ; \qquad \boldsymbol{b} = \gamma_1[\boldsymbol{v_1}\times\boldsymbol{r}]. \tag{330}$$

Il viendra, C ayant disparu du dénominateur de (328) :

$$\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{e} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{b}}{B^3} \tag{331}$$

et l'on aura d'ailleurs :

$$B^2 = e^2 - b^2. \tag{332}$$

Alors $\boldsymbol{e}$ ou $\boldsymbol{e}/B^3$ est une espèce de champ électrique, tandis que $\boldsymbol{b}$ ou plutôt $\boldsymbol{b}/B^3$ est une espèce de champ magnétique.

3°) Le postulat de relativité nous obligerait à adopter la solution (326) ou la solution (331) ou l'une quelconque des solutions qui s'en déduiraient à l'aide de la première remarque ; mais la première question qui se pose est celle de savoir si elles sont compatibles avec les observations astronomiques ; la divergence avec la loi de Newton est de l'ordre de v^2, c'est-à-dire 10 000 fois plus petite que si elle était de l'ordre de v, c'est-à-dire si la propagation se faisait avec la vitesse de la lumière *ceteris non mutatis* (sans autre changement) ; il est donc permis d'espérer qu'elle ne sera pas trop grande. Mais une discussion approfondie pourra seule nous l'apprendre.

Paris, juillet 1905. H. Poincaré.

Résumé et conclusions

Résumons brièvement les principaux résultats obtenus par Poincaré dans ces deux ouvrages.

A) Il renouvelle sa présentation de 1904 du principe de relativité, principe qui concerne tous les phénomènes physiques (voir ci-dessus pages 8 et 9).

B) Il montre pour la première fois que les transformations, qu'il baptise « transformations de Lorentz », forment avec les rotations spatiales un groupe mathématique, groupe qu'il baptise « groupe de Lorentz ».

C) Il construit les opérateurs infinitésimaux de ce groupe et détermine son invariant : la forme quadratique $x^2+y^2+z^2-t^2$; rappelons que la vitesse de la lumière est prise pour unité.

D) Il détermine les transformations correspondantes des champs électromagnétiques et établit une série de « quadrivecteurs » dont les modifications, lors des transformations de Lorentz, sont les mêmes que celles des coordonnées d'espace et de temps (quadrivecteur spatio-temporel $(\boldsymbol{r}, t)$).

Ces autres quadrivecteurs sont :
– la force par unité de volume et le travail par unité de temps : $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v})$;
– le quadrivecteur quantité de mouvement-énergie $(m\boldsymbol{v}, m)$; avec $m = m_\text{o}/\sqrt{1-v^2}$, et m_o = « masse au repos » ;
– le courant et la charge par unité de volume : $(\rho\boldsymbol{v}, \rho)$;
– le quadrivecteur des potentiels vecteur et scalaire : $(\boldsymbol{A}, \varphi)$;
– le quadrivecteur $[(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v})/\sqrt{1-v^2}]$ où $\boldsymbol{F}$ est une force quelconque, par exemple la force électromagnétique appliquée à une charge unité.

E) Ce faisant, il établit que les champs électromagnétiques et la force de Lorentz respectent eux aussi le principe de relativité lequel, en l'occurence, procède des équations de Maxwell-Lorentz d'une manière mathématiquement rigoureuse.

F) Il établit la loi relativiste d'addition des vitesses.

G) Il démontre l'invariance de l'intégrale d'action pour un champ électromagnétique lors des transformations de Lorentz, et découvre les invariants fondamentaux du champ électromagnétique :

$$\varepsilon \boldsymbol{E}^2 - \frac{\boldsymbol{B}^2}{\mu} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}$$

H) Il établit l'équation de la mécanique relativiste :

$$(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v}, m)}{\mathrm{d}t}$$

et écrit l'expression correspondante du Lagrangien d'un point matériel mobile.

I) Il imagine l'espace quadri-dimensionnel de coordonnées x, y, z, $t\sqrt{-1}$ et montre que les transformations de Lorentz sont des rotations de cet espace autour de l'origine. Cela lui permet de construire divers invariants.

J) Il souligne que toutes les forces de la nature, et pas seulement les forces électromagnétiques, sont transformées de la même manière lors des transformations de Lorentz.

K) Il introduit le concept d'« onde gravifique » ou onde gravitationnelle se déplaçant à la vitesse de la lumière et montre que la propagation de la gravité à cette vitesse n'est pas contradictoire avec les données de l'observation.

Cette courte liste montre que Henri Poincaré fut le premier à découvrir les constituants essentiels de la théorie de la relativité, et ce dans une forme précise et générale.