Quadrature

Magazine de mathématiques pures et épicées

La mathématique ouvre plus d'une fenêtre sur plus d'un monde

πr^2

- Mots, maths et histoire
- Du nouveau du côté des nombres ?
- Albert Badoureau (1853–1923)
- Notes de lecture
- Quelques inégalités...
- Zéro puissance zéro
- Apollonios et les singularités
- Coin des problèmes
- Prononcer les nombres

n° 66
Magazine trimestriel
Octobre–Décembre 2007
ISSN 1142-2785 – 8 Euros

EDP SCIENCES

Badoureau à la recherche des polyèdres isocèles

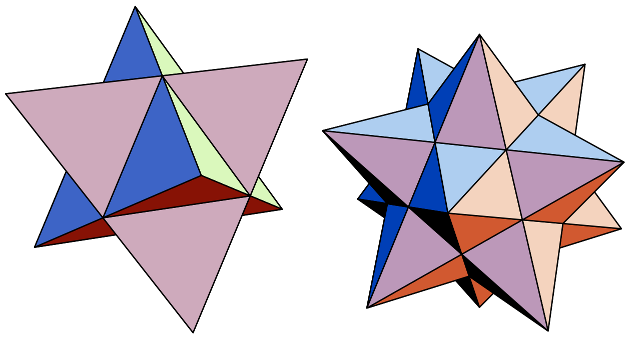
par Sylvain Crovisier*

« La symétrie est pour la Géométrie ce que la théorie des nombres est pour l'Arithmétique. »

A. Badoureau, Mémoire sur les figures isoscèles.

Un précédent article [4] nous présentait Albert Badoureau et évoquait ses relations avec Jules Verne. Cet ingénieur des mines a également laissé divers écrits scientifiques. Nous nous intéressons à présent à sa principale contribution mathématique [1], qui concerne la recherche de polyèdres vérifiant certaines conditions de symétrie. Ce sujet fascine depuis l'Antiquité et de nombreux polyèdres étaient déjà connus bien avant son travail[1]. Les premiers étudiés, les *polyèdres réguliers*, sont ceux qui ont le plus d'éléments de symétrie : leurs faces sont des polygones réguliers et leurs sommets sont réguliers (les voisinages des sommets sont des cônes appuyés sur des polygones réguliers). Les plus célèbres sont les polyèdres réguliers convexes, appelés *polyèdres de Platon*. Les *éléments* d'Euclide contiennent la démonstration qu'il n'y en a que cinq : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

La définition des polyèdres permet aussi de considérer des figures non convexes : un polyèdre est le recollement de polygones (plans, mais non nécessairement convexes) selon leurs arêtes de sorte que chaque arête borde exactement deux polygones. On autorise les faces et les arêtes à s'intersecter[2]. On demande également que le polyèdre soit « *indécomposable* », c'est-à-dire qu'il ne soit pas la réunion de plusieurs polyèdres. (Par exemple, la figure 1(a) se décompose et n'est pas un polyèdre.) On obtient ainsi quatre polyèdres réguliers non-convexes, appelés *polyèdres de Kepler-Poinsot* (figure 1(b)). Il a fallu attendre Cauchy pour établir en 1813 que cette liste était complète. Ces polyèdres sont *étoilés* : ils sont obtenus à partir du dodécaèdre et de l'icosaèdre en collant des pyramides le long des faces.



(a) (b)

Figure 1. Deux figures étoilées régulières. (a) Le composé régulier de deux tétraèdres (il possède huit sommets et ses huit faces sont des triangles ▼). Les arêtes se recoupent en six autres points (qui ne sont pas des sommets) et les faces en douze segments (qui ne sont pas des arêtes). (b) Le petit dodécaèdre étoilé (les douze faces sont des pentagones étoilés ★). En chaque sommet, les branches de cinq pentagones se rejoignent.

Si l'on cherche à présent à affaiblir les conditions de régularité, on obtient la notion de *polyèdre uniforme* :

– Les sommets ne sont plus forcément réguliers, mais restent néanmoins « *égaux* » : on peut échanger deux sommets quelconques par une

* CNRS – Université Paris 13 ;
e-mail : `crovisie@math.univ-paris13.fr`

[1] Pour un exposé plus complet sur les différentes familles de polyèdres, nous renvoyons au livre de H.S.M. Coxeter [2].

[2] De ce fait, il est parfois difficile de visualiser les faces d'un polyèdre non convexe. Par exemple, sur la figure 1(b), les faces sont les grands pentagones étoilés, et chacune est traversée par cinq autres faces. Nous proposons au lecteur d'essayer d'identifier les faces des divers polyèdres représentés dans cet article.

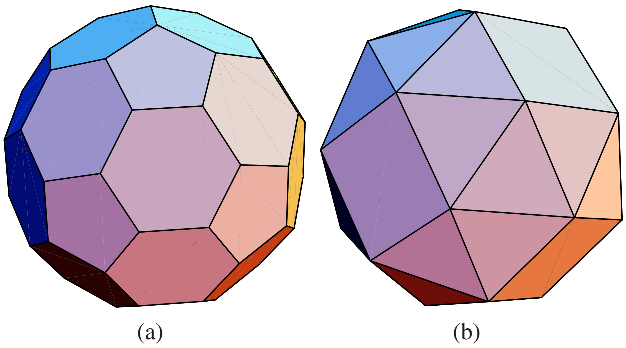


Figure 2. Deux polyèdres d'Archimède. (a) L'icosaèdre tronqué (le ballon de football), formé de vingt hexagones et douze pentagones. (b) Le cube adouci, formé de trente-deux triangles et six carrés.

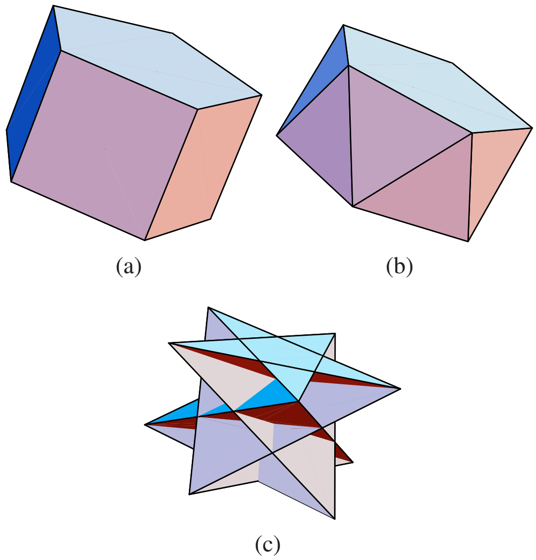


Figure 3. (a) Un prisme (formé de deux pentagones et de cinq carrés), (b) un anti-prisme (deux pentagones et dix triangles) et (c) un prisme étoilé (deux pentagones étoilés et dix triangles).

isométrie qui préserve globalement le polyèdre[3].

– On demande toujours aux faces d'être des polygones réguliers, mais elles ne sont plus toutes identiques.

Les figures que l'on peut alors obtenir (par exemple le ballon de football, figure 2(a)) s'inscrivent toujours dans une sphère. La liste des polyèdres uniformes convexes est connue depuis Kepler : elle contient les familles des *prismes* et des *anti-prismes* (figure 3) ainsi que les 13 *polyèdres d'Archimède*, dont certains sont chiraux (leurs seules isométries sont des déplacements ; autrement dit, ils ne coïncident pas avec leur image dans un miroir) (par exemple le cube adouci[4], figure 2(b)). Cette fois encore, la complétude n'a été démontrée que bien plus tard, en 1861, par Catalan qui énonce précisément la définition de ces polyèdres, les nomme « *polyèdres semi-réguliers* », puis développe le cas convexe.

Dans son mémoire, Badoureau propose la première étude systématique des polyèdres uniformes non-convexes, poursuivant le travail de Catalan. Toutefois, il préfère les appeler « *polyèdres isoscèles* », car le nom « *semi-régulier* » apparaissait déjà dans d'autres contextes. Il reprend une méthode qu'avait utilisée Joseph Bertrand pour construire les polyèdres non-convexes de Kepler-Poinsot : en principe, elle permet d'obtenir la liste complète des polyèdres uniformes ; mais en pratique, elle demande d'examiner par le calcul de nombreux cas. On peut expliquer sa méthode en utilisant le langage des groupes d'isométries (qui ne faisait qu'émerger à l'époque du travail de Badoureau).

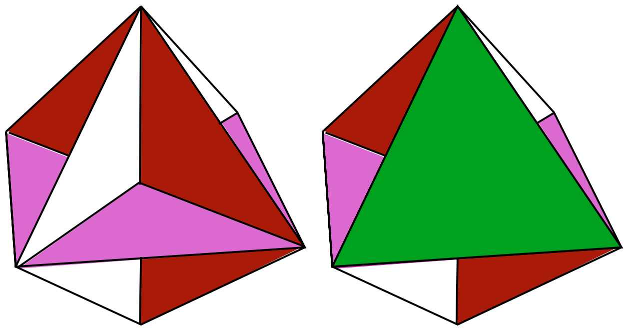
Tout d'abord, il faut déterminer l'ensemble des sommets : par définition, les sommets d'un polyèdre uniforme suivent une *orbite* du groupe des isométries du polyèdre. Les groupes finis d'isométries de l'espace peuvent être aisément énumérés. On trouve :

– les groupes de rotation finis et les groupes diédraux, laissant un axe invariant ;
– les groupes des déplacements et les groupes des isométries du tétraèdre, du cube et du dodécaèdre. (On obtient le même groupe d'isométries pour le cube et l'octaèdre ainsi que pour le dodécaèdre et l'icosaèdre.)

Pour chacun de ces groupes, on peut considérer ses orbites : à un point de l'espace, on associe l'ensemble (fini) de ses images par les éléments du groupe. En faisant varier le point initial, l'orbite se déforme mais d'un point de vue combinatoire, on ne voit apparaître qu'un nombre fini de configurations différentes : ces configurations correspondent aux ensembles de sommets des différents polyèdres uniformes convexes. (Par exemple, les sommets du ballon de football et l'ensemble des sommets de l'icosaèdre forment deux orbites combinatoirement différentes du groupe des isométries du dodécaèdre. Les sommets du cube adouci forment une orbite du groupe des déplacements du cube.) En résumé, on obtient les orbites d'un groupe fini d'isométries de l'espace (et donc un candidat à devenir l'ensemble des

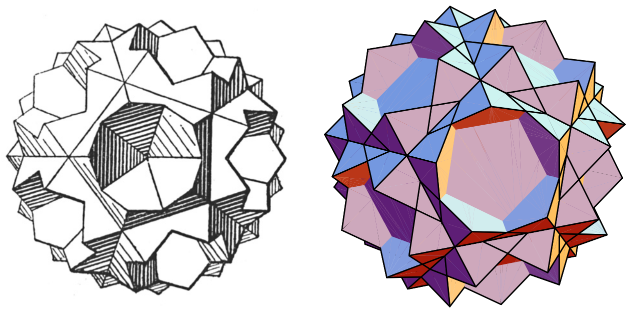
[3] Cette définition fait intervenir le *groupe des isométries du polyèdre*. On peut proposer une définition analogue pour les polyèdres réguliers : ce sont les polyèdres dont le groupe de symétrie permet d'échanger deux triplets (S, A, F) quelconques, où S est un sommet contenu dans une arête A, elle-même contenue dans une face F.

[4] La terminologie des polyèdres uniformes varie selon les auteurs. Ce dérivé du cube est parfois aussi appelé « *cube camus* », qui est la traduction du nom latin « *cubus simus* » donné par Kepler. Le terme anglais est « *snub cube* ».



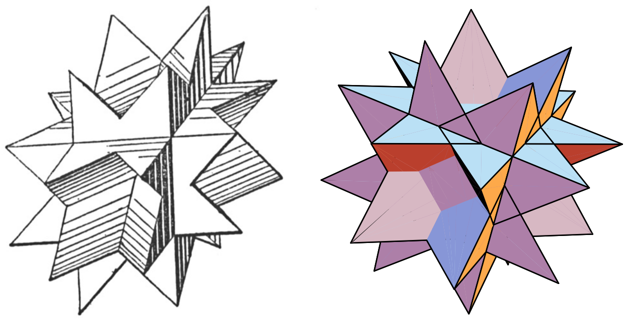
(a) (b)

Figure 4. Recherche des polyèdres uniformes inscrits dans un octaèdre. (a) Les trois carrés inscrits dans un octaèdre. (b) Le tétrahémihexaèdre, formé de trois carrés et de quatre triangles.



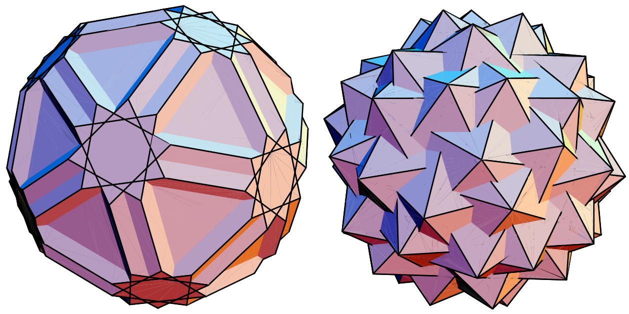
(a) (b)

Figure 6. Le jeux des différences (suite) : le petit dodécaèdre étoilé quasitronqué, formé de douze pentagones et douze décagones étoilés. (a) Dessiné par Badoureau. (b) Dessiné à l'aide de Mathematica.



(a) (b)

Figure 5. Le jeux des différences : l'hexaèdre quasitronqué, formé de huit triangles et six octogones étoilés. (a) Dessiné par Badoureau. (b) Dessiné à l'aide de Mathematica.



(a) (b)

Figure 7. Deux polyèdres uniformes non-convexes. (a) L'icosidodécaèdre icosidodécatronqué, que Badoureau avait découvert sans parvenir à le dessiner. Il est formé de vingt hexagones, douze décagones et douze décagones étoilés. (b) Le grand icosidodécaèdre camus, formé de quatre-vingts triangles et douze pentagones étoilés. Ce polyèdre chiral n'a été découvert qu'au XX[e] siècle, par Coxeter et Miller.

sommets d'un polyèdre uniforme) en choisissant un polyèdre uniforme convexe et en modifiant éventuellement la longueur de certaines arêtes.

La deuxième étape de la construction consiste à rechercher les faces possibles : il faut examiner l'ensemble des polygones réguliers inscrits dans chaque orbite. Par exemple, dans l'ensemble des sommets d'un octaèdre on peut inscrire huit triangles réguliers (les faces de l'octaèdre), ainsi que trois carrés (figure 4(a)). Finalement, il reste à comprendre si l'on peut recoller le long de leurs arêtes certains des polygones ainsi obtenus pour construire un polyèdre. À partir de l'octaèdre, on peut recoller les trois carrés avec quatre triangles équilatéraux. On obtient le plus simple des polyèdres uniformes non-convexes et non-réguliers (figure 4(b)).

Badoureau explique comment obtenir de cette manière trois familles de prismes étoilés, mais aussi trente-huit polyèdres non-convexes et non-réguliers. Du fait de leur complexité (certains polyèdres ont cent-vingt sommets), il ne parvient à en dessiner complètement que dix-sept. Il conclut ainsi son étude :

> « [Ce mémoire] contient toutes les figures isoscèles convexes possibles. Nous n'oserions pas être aussi affirmatifs en ce qui concerne les figures étoilées, quel que soit le soin que nous avons apporté à leur recherche. (...) Il ne serait pas impossible qu'il se fût glissé quelque omission. »

Outre quelques légères inexactitudes sur le tracé de certains polyèdres (voir les figures 5 et 6), il a effectivement commis quelques erreurs. Tout d'abord, il ne s'aperçoit pas que le dernier polyèdre qu'il décrit est dégénéré : au total, Badoureau a donc découvert trente-sept nouveaux polyèdres non-prismatiques. D'autre part, il a oublié de considérer plusieurs cas et sa liste est finalement incomplète...

Alors qu'il fut le premier à étudier systématiquement les polyèdres uniformes non-convexes, il n'a pas été tout à fait le premier à en construire : quelques années plus tôt, E. Hess, en Allemagne, en avait trouvé deux, et au même moment, J. Pitsch, en Autriche, en décrit dix-huit (dont quatre qui ne figurent pas dans la liste de Badoureau). L'histoire de cette recherche s'est encore poursuivie pendant presque un siècle. Au milieu du XXe siècle, par une approche différente, le grand géomètre H.S.M. Coxeter et son collaborateur J.C.P. Miller en découvrent 12 autres [3], ce qui porte le nombre total à soixante-quinze polyèdres uniformes non-prismatiques, dont cinquante-trois non-convexes et non-réguliers. Finalement, c'est S.P. Sopov qui a montré en 1970 que la liste était complète. J. Skilling a donné une nouvelle preuve de la complétude en 1975, à l'aide de l'ordinateur.

Les polyèdres uniformes sont captivants, au moins autant pour leur esthétisme que pour leur intérêt mathématique. On les trouve représentés sur plusieurs sites Internet[5], dont celui de l'artiste George Hart. Le lecteur intéressé peut aussi construire des modèles en carton grâce au livre de M.J. Wenninger [5].

Remerciements. Les figures ont été réalisées à l'aide des programmes *Kaleido* de Zvi Har'El et *Uniform Polyhedra* de Roman Maeder. L'auteur remercie Anna Erschler pour son aide concernant le travail de S.P. Sopov ainsi que Jean-Jacques Dupas pour ses commentaires sur les polyèdres uniformes.

Références

[1] A. Badoureau, « Mémoire sur les figures isoscèles », *J. École Polytechnique* **49** (1881) 47–172.

[2] H.S.M. Coxeter, *Regular Polytopes*, Dover, 1973.

[3] H.S.M. Coxeter, M.S. Longuet-Higgins et J.C.P. Miller, « Uniform polyhedra », *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A* **246** (1953) 401–449.

[4] J. Crovisier, « Albert Badoureau, mathématicien oublié », *Quadrature* **66** (2007) 15–19.

[5] M.J. Wenninger, *Polyhedron models*, Cambridge University Press, 1978.

* *

[5] Sites Internet : George Hart, *Encyclopedia of polyhedra*, `http://georgehart.com` ; l'article *Uniform polyhedron* de Mathworld, `http://mathworld.wolfram.com`

QUADRATURE

Appel à auteurs

Quadrature, magazine de mathématiques pures et appliquées, **s'adresse aux enseignants, étudiants, ingénieurs, amateurs de mathématiques**.

La plupart des articles requièrent un bon niveau de terminale scientifique ou une première année de premier cycle. Les auteurs sont des mathématiciens, des enseignants et des étudiants...

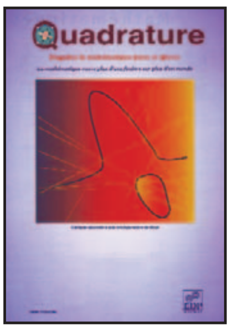
Quadrature est éclectique : certains articles présentent des mathématiques toutes récentes, tandis que d'autres donnent un nouveau point de vue sur des sujets traditionnels ou encore ressuscitent des questions de géométrie ancienne. On trouve également dans le magazine un **forum**, des **nouvelles**, des **notes de lecture**, des **articles d'histoire des mathématiques** et des **articles de réflexion en relation avec l'actualité**. Enfin, un large « coin des problèmes » permet aux lecteurs de poser des questions, qu'ils en connaissent la réponse ou pas.

Quadrature est ouvert, en particulier aux jeunes. Le magazine publie régulièrement des TPE (travaux personnels encadrés) de terminale et premier cycle d'université.

Vous souhaitez contribuer activement à la revue. Venez enrichir nos différentes rubriques et proposez-nous :

- ✔ articles de revue,
- ✔ brèves scientifiques,
- ✔ forum des lecteurs,
- ✔ manifestations,
- ✔ reportages,
- ✔ images mathématiques,
- ✔ analyses d'ouvrages et de logiciels,
- ✔ sites internet spécialisés en mathématiques,
- ✔ nouvelles, fantaisies mathématiques...

N'hésitez pas à prendre contact avec notre bureau de rédaction :



Quadrature
EDP Sciences
PA de Courtabœuf
17 avenue du Hoggar
BP 112
91944 Les Ulis Cedex A
Tél. : 01 69 18 75 75 • Fax : 01 69 07 45 17
E-mail : **quadrature@edpsciences.org**

Quadrature

Le magazine de mathématiques pures et épicées

Quadrature, magazine de mathématiques pures et appliquées, **s'adresse aux enseignants, étudiants, ingénieurs, amateurs de mathématiques**.

La plupart des articles requièrent un bon niveau de terminale scientifique ou une première année de premier cycle. Les auteurs sont des mathématiciens, mais aussi des enseignants motivés et des étudiants.

Quadrature est éclectique : certains articles présentent des mathématiques toutes récentes, tandis que d'autres donnent un nouveau point de vue sur des sujets traditionnels ou encore ressuscitent des questions de géométrie ancienne ! On trouve également dans le magazine un **forum**, des **nouvelles**, des **notes de lecture**, des **articles d'histoire des mathématiques** et des **articles de réflexion en relation avec l'actualité**. Enfin, un large "coin des problèmes" permet aux lecteurs de poser des questions, qu'ils en connaissent la réponse ou pas.

Quadrature est ouvert, en particulier aux jeunes. Le magazine publie régulièrement des TPE (travaux personnels encadrés) de terminale et premier cycle d'université.

BULLETIN D'ABONNEMENT
Quadrature

❐ Mme ❐ Mlle ❐ M.

Nom ....

Prénom ....

Profession ....

Institution ....

....

Adresse ....

....

....

Code Postal ....

Ville ....

Pays ....

e-mail ....

Veuillez enregistrer mon abonnement :

❐ Pour **1 an** (4 numéros) :
- ❐ **Europe** (TVA 2,1% incluse) .... 32 €
- ❐ **Reste du monde** (Hors Taxe) .... 37 €

❐ Pour **2 ans** (8 numéros) :
- ❐ **Europe** (TVA 2,1% incluse) .... 58 €
- ❐ **Reste du monde** (Hors Taxe) .... 68 €

Paiement :

❐ Envoyez-moi une facture proforma

❐ Chèque joint (à l'ordre d'EDP Sciences)

❐ Carte de Crédit :

❐ Visa ❐ Eurocard ❐ American Express

Carte No ....

Date de validité ....

date/signature

EDP SCIENCES

Veuillez retourner ce coupon à :

EDP Sciences - Service Abonnement
17, avenue du Hoggar • B.P. 112 • PA de Courtabœuf • F-91944 Les Ulis Cedex A • France
Tél. 33 (0)1 69 18 75 75 • Fax 33 (0)1 69 86 06 78 - E-mail : subscribers@edpsciences.org